

Использование метода LS-STAG для численного решения сопряженных задач аэроупругости

Марчевский И.К., Пузикова В.В.

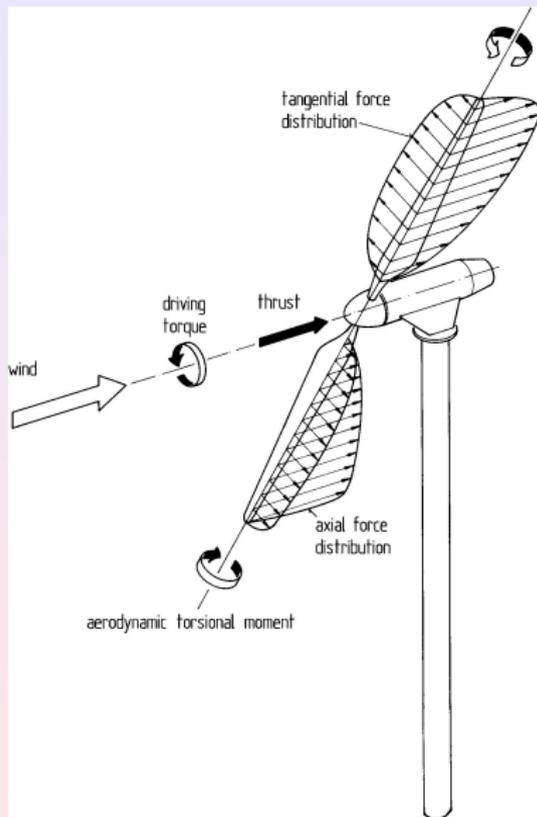
МГТУ им. Н.Э. Баумана



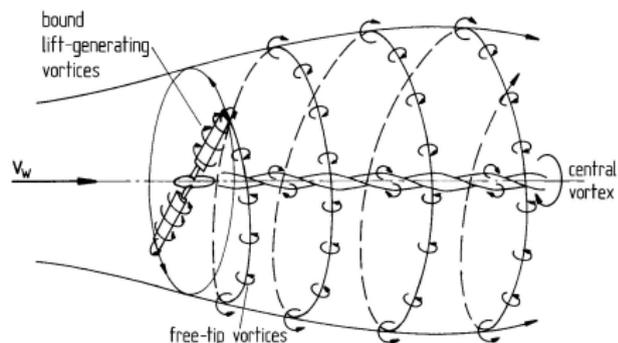
IV Международная конференция «Облачные вычисления. Образование. Исследования. Разработка»
Москва, Россия, 5–6 декабря 2013

- 1 Введение
- 2 Метод LS-STAG
- 3 Постановка задачи
- 4 Тестовые задачи
 - Вынужденные поперечные колебания кругового профиля
 - Вынужденные продольные колебания кругового профиля
- 5 Ветровой резонанс кругового профиля
- 6 Авторотация роторов ветроэнергетических установок
- 7 Заключение

Введение



погруженное тело + жидкость = единая система



В случае достаточно тяжёлого тела:

- 1 моделирование обтекания тела, движущегося с заданными параметрами;
- 2 расчёт динамики тела при известных гидродинамических нагрузках.

Где возникают сопряженные задачи аэроупругости?



Рис. 1. Ветроэнергетические установки (ВЭУ)



Рис. 2. Линии электропередачи (ЛЭП)

Метод LS-STAG

LS-STAG¹ — новый² метод расчёта течений, соединяющий в себе преимущества

- MAC-метода (метода маркеров и ячеек)
 - ✓ прямоугольные разнесённые сетки \Rightarrow простота построения сетки
 - ✓ пятиточечный шаблон (в 2D) \Rightarrow работают эффективные решатели
- метода погруженных границ
 - ✓ граница области течения не связана с расчётной сеткой \Rightarrow упрощение работы с областями сложной формы
 - ✓ расчёт течений с подвижными границами на неподвижной сетке \Rightarrow нет перестроения сетки на каждом шаге расчёта
- метода функций уровня
 - ✓ явное представление погруженной границы \Rightarrow простота вычисления геометрических характеристик ячеек сетки

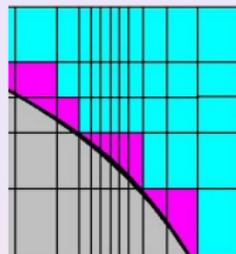
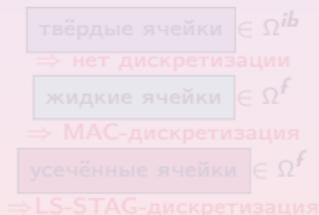


Рис. 3. Расчётная область: $\Omega = \Omega^f \cup \Omega^{ib}$

и имеющий характерные особенности

- ✓ $O(\Delta t^2)$ как по скоростям, так и по давлению
- ✓ единообразная дискретизация в прямоугольных и усечённых ячейках
- ✓ на усечённых ячейках происходит не интерполяция и снос, а непосредственное вычисление решений и учёт в дискретизации граничных условий
- ✓ выполняются численные аналоги законов сохранения полной массы, импульса и кинетической энергии во всей области течения



¹ Level Set STAGgered — метод погруженных границ с функциями уровня для разнесённых сеток

² Cheny Y., Botella O. The LS-STAG method: A new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex moving geometries with good conservation properties// J. Comput. Phys. — 2010. — № 229. — P. 1043–1076.

Метод LS-STAG

LS-STAG¹ — новый² метод расчёта течений, соединяющий в себе преимущества

- MAC-метода (метода маркеров и ячеек)
 - ✓ прямоугольные разнесённые сетки \Rightarrow простота построения сетки
 - ✓ пятиточечный шаблон (в 2D) \Rightarrow работают эффективные решатели
- метода погруженных границ
 - ✓ граница области течения не связана с расчётной сеткой \Rightarrow упрощение работы с областями сложной формы
 - ✓ расчёт течений с подвижными границами на неподвижной сетке \Rightarrow нет перестроения сетки на каждом шаге расчёта
- метода функций уровня
 - ✓ явное представление погруженной границы \Rightarrow простота вычисления геометрических характеристик ячеек сетки

и имеющий характерные особенности

- ✓ $O(\Delta t^2)$ как по скоростям, так и по давлению
- ✓ единообразная дискретизация в прямоугольных и усечённых ячейках
- ✓ на усечённых ячейках происходит не интерполяция и снос, а непосредственное вычисление решений и учёт в дискретизации граничных условий
- ✓ выполняются численные аналоги законов сохранения полной массы, импульса и кинетической энергии во всей области течения

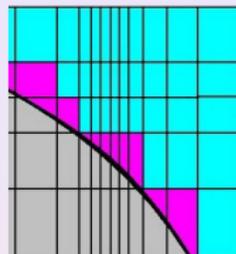
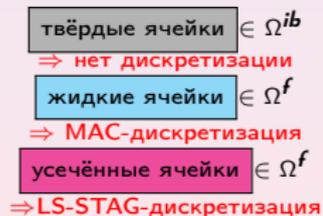


Рис. 3. Расчётная область: $\Omega = \Omega^f \cup \Omega^{ib}$



¹ Level Set STAGgered — метод погруженных границ с функциями уровня для разнесённых сеток

² Cheny Y., Botella O. The LS-STAG method: A new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex moving geometries with good conservation properties// J. Comput. Phys. — 2010. — № 229. — P. 1043–1076.

LS-STAG-дискретизация в 2D

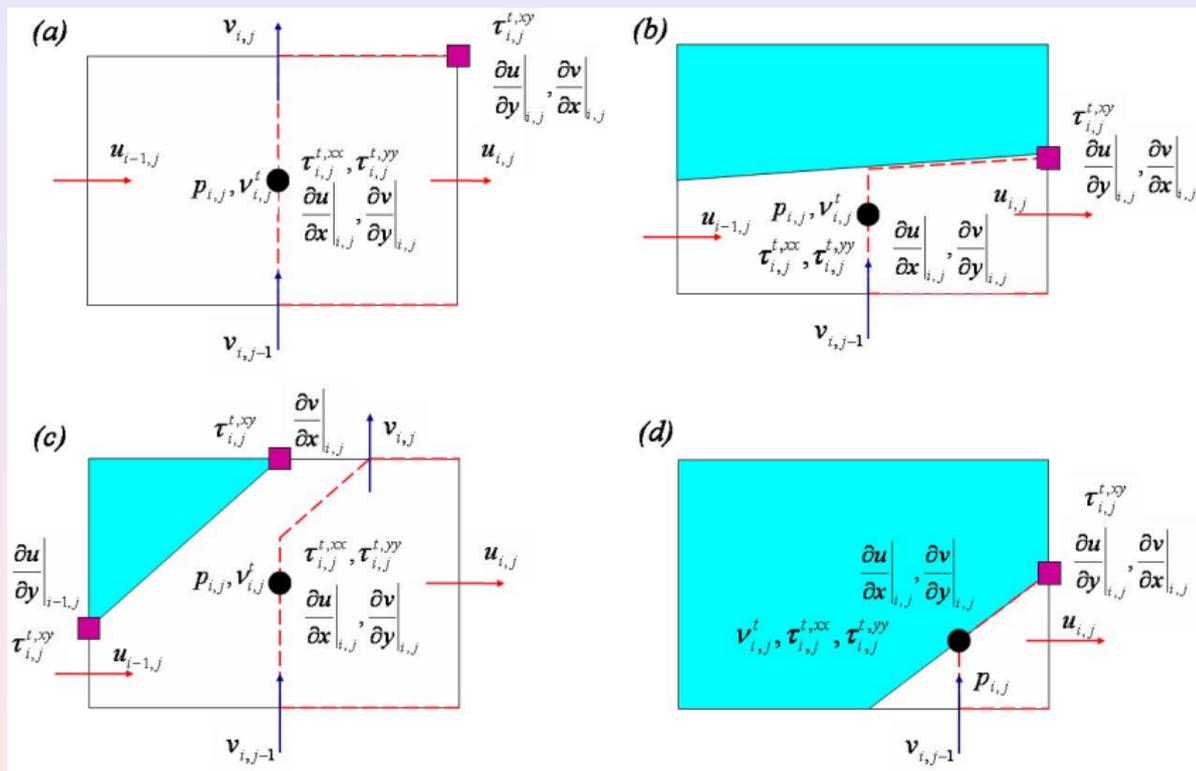


Рис. 4. (а) жидкая прямоугольная ячейка; (б) северная трапеция; (с) северо-западный пятиугольник; (д) северо-западный треугольник

Модификация метода LS-STAG для подвижных погруженных границ

Метод LS-STAG удобно использовать для решения сопряжённых задач аэроупругости:

- ✓ используется идея метода ALE³
 - вблизи Γ^{ib} сетка следует за Γ^{ib} (**лагранжево описание**)
 - на достаточном удалении от Γ^{ib} сетка неподвижна (**эйлерово описание**)
 - сохраняет точность и устойчивость аналога с неподвижной сеткой⁴, если скорость сетки и алгоритм её перестроения выбираются из условия выполнения численного аналога **геометрического закона сохранения**⁵
 - ✓ сетка не деформируется
 - ✓ движутся только узлы сетки на твёрдых границах усечённых ячеек
- } ⇒ выполнение геометрического закона сохранения упрощается

³ Arbitrary Lagrangian Eulerian — произвольные лагранжево-эйлеровы сетки

⁴ Farhat C., Geuzaine P., Grandmonty C. The discrete geometric conservation law and the nonlinear stability of ALE schemes for the solution of flow problems on moving grids // J. Comput. Phys. — 2001. — № 174. — P. 669–694

⁵ Изменение объёмов ячеек во времени должно быть равно объёму, «заметаемому» границами ячеек

Постановка задачи

Рассмотрим внешнее обтекание жёсткого профиля произвольной формы, который может совершать колебания с 1, 2 или 3 степенями свободы, равномерным потоком вязкой несжимаемой среды постоянной плотности $\bar{\rho}$.

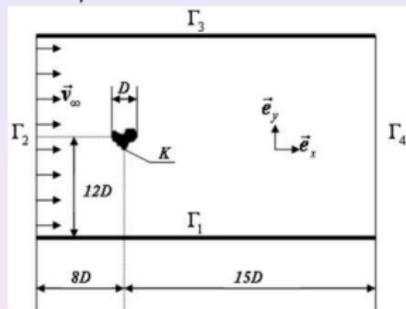


Рис. 5. Расчётная область

Движение профиля описывается уравнениями динамики:

$$\ddot{\vec{q}} = \vec{\Phi}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + \vec{Q}^{\text{flow}} + \vec{Q}^{\text{ext}},$$

- \vec{q} — обобщённые координаты профиля,
- $\vec{\Phi}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ определяется связями, наложенными на профиль,
- \vec{Q}^{flow} — обобщённая аэродинамическая сила,
- \vec{Q}^{ext} — внешние массовые силы.

Математическая модель в безразмерной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{v} = 0, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v} = 0, \\ \vec{v}(x, y, 0) = \vec{v}_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ \vec{v}|_{\kappa} = \vec{v}^{\text{ib}} = \vec{v}^{\text{ib}}(x, y, t), \\ \vec{v}|_{\Gamma \setminus \Gamma_4} = \vec{V}_\infty, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma_4} = \vec{0}, \quad \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma \cup \kappa} = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

- $x = \bar{x}/\bar{D}$, $y = \bar{y}/\bar{D}$ — безразмерные координаты,
- $t = \bar{t} \bar{V}_\infty / \bar{D}$ — безразмерное время,
- $p = p(x, y, t) = \bar{p} / (\bar{\rho} \bar{V}_\infty^2)$ — безразмерное давление,
- $\vec{v} = \vec{v}(x, y, t) = u \cdot \vec{e}_x + v \cdot \vec{e}_y$ — безразмерная скорость ($u = \bar{u} / \bar{V}_\infty$, $v = \bar{v} / \bar{V}_\infty$),
- $\text{Re} = \bar{V}_\infty \bar{D} / \bar{\nu}$ — число Рейнольдса.

Вынужденные поперечные колебания кругового профиля

Движение центра профиля задаётся законом

$$x_c = x_{c0},$$

$$y_c = y_{c0} + \begin{cases} A, & t < 10D/V_\infty, \\ A \cos(2\pi S_e [tV_\infty - 10D]/D), & t \geq 10D/V_\infty, \end{cases}$$

- (x_{c0}, y_{c0}) — начальное положение центра профиля,
- A — амплитуда колебаний,
- S_e — кинематическое число Струхала.

Расчеты проводились на неравномерной сетке 240×296 с шагом по времени $\Delta t = 0.005$.

$V_\infty = 1.0$, $D = 1.0$, $Re = 185$, $A = 0.2D^6$, $S_e/Sh \in [0.8, 1.2]^7$, $Sh = 0.201$.

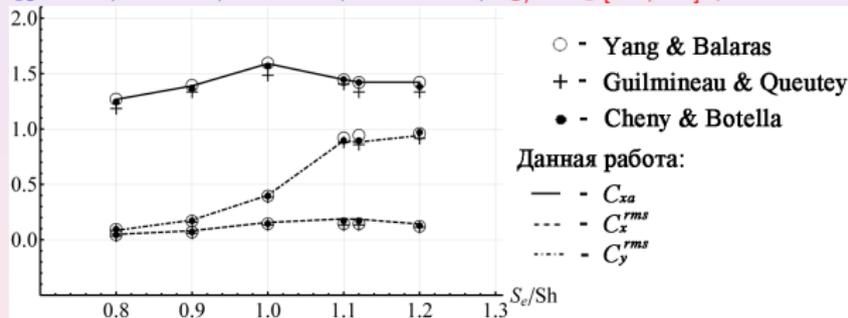


Рис. 6. Сравнение рассчитанных коэффициентов C_{xa} , C_x^{rms} и C_y^{rms} с результатами других исследователей

⁶ Gu W., Chyu C., Rockwell D. Timing of vortex formation from an oscillating cylinder // Physics of Fluids. — 1994. — № 6. — P. 3677–3682.

⁷ Guilmineau E., Queutey P. A numerical simulation of vortex shedding from an oscillating circular // J. Fluid Struct. — 2002. — № 16. — P. 773–794.

Вынужденные поперечные колебания кругового профиля

Таблица 2. C_{xa} , C_x^{rms} и C_y^{rms} при $S_e/Sh = 1.2$

Сетка	C_{xa}	C_x^{rms}	C_y^{rms}
Данная работа			
240 × 296	1.422	0.142	0.941
Cheny & Botella (LS-STAG)			
60 × 120	1.309	0.366	0.884
100 × 150	1.202	0.101	0.754
170 × 190	1.386	0.124	0.889
300 × 260	1.422	0.142	0.941
550 × 350	1.387	0.132	0.975
Yang & Balaras			
800 × 640	1.426	0.128	0.964
Guilmineau & Queutey			
180 × 120	1.35	0.129	0.931

Таблица 1. C_{xa} , C_x^{rms} и C_y^{rms} при $S_e/Sh = 1.1$

Сетка	C_{xa}	C_x^{rms}	C_y^{rms}
Данная работа			
240 × 296	1.446	0.189	0.894
Guilmineau & Queutey			
120 × 50	1.595	0.163	0.574
120 × 100	1.366	0.145	0.882
120 × 200	1.351	0.135	0.881
180 × 100	1.401	0.149	0.901
180 × 200	1.404	0.153	0.893
240 × 100	1.396	0.144	0.893
240 × 200	1.420	0.149	0.897

Вынужденные поперечные колебания кругового профиля

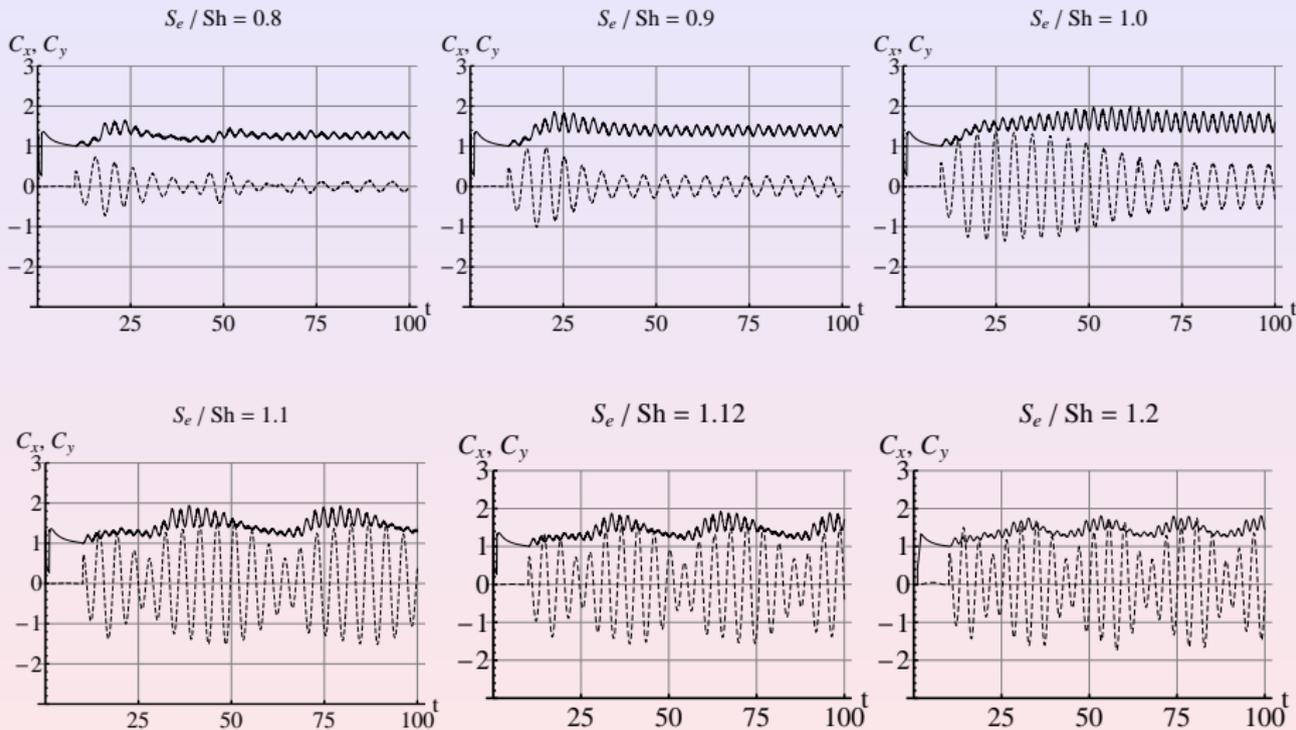


Рис. 7. $C_x(t)$ и $C_y(t)$ при $Re = 185$ и различных значениях S_e/Sh

Вынужденные поперечные колебания кругового профиля

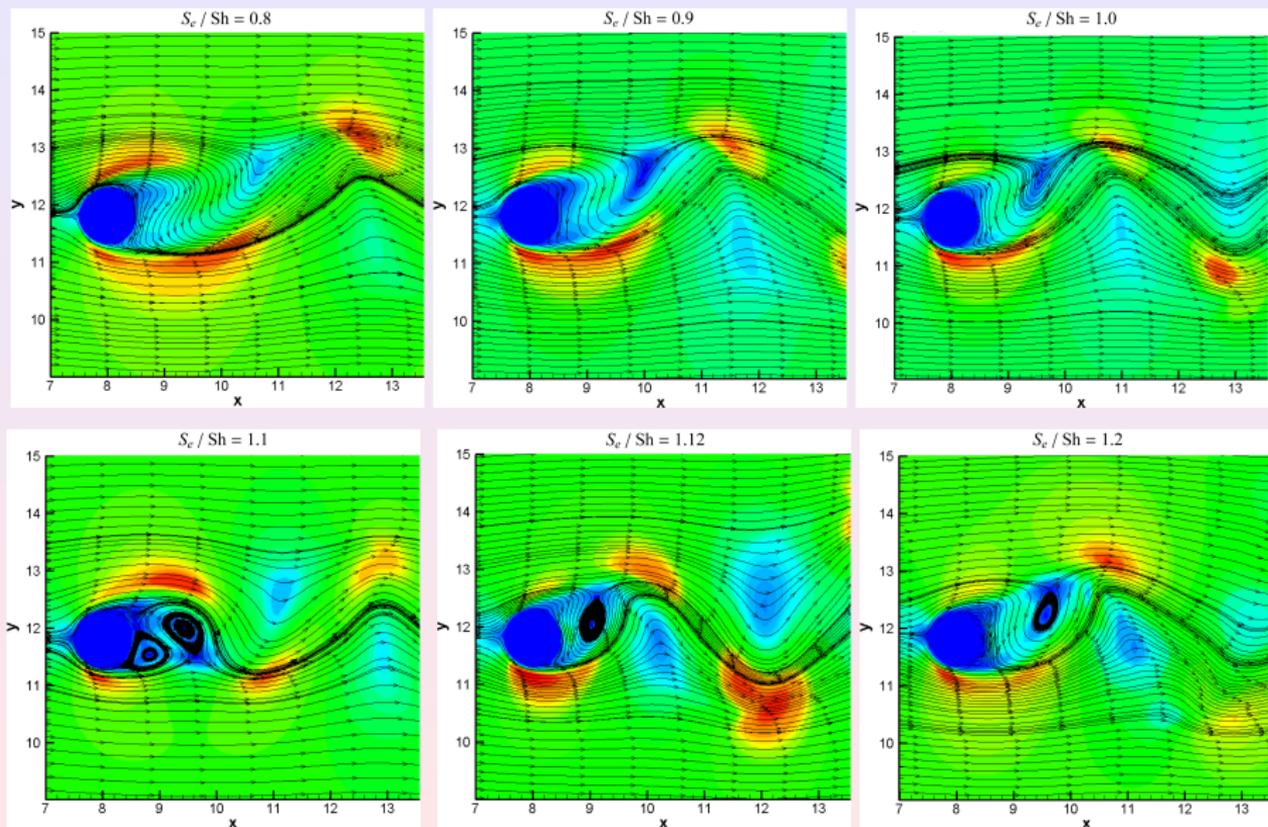


Рис. 8. Линии тока при $Re = 185$ и различных значениях S_e / Sh (профиль в крайнем нижнем положении)

Вынужденные продольные колебания кругового профиля

Движение центра профиля задаётся законом

$$x_c = x_{c0} + \begin{cases} A, & t < 10D/V_\infty, \\ A \cos(2\pi S_e [tV_\infty - 10D]/D), & t \geq 10D/V_\infty, \end{cases}$$

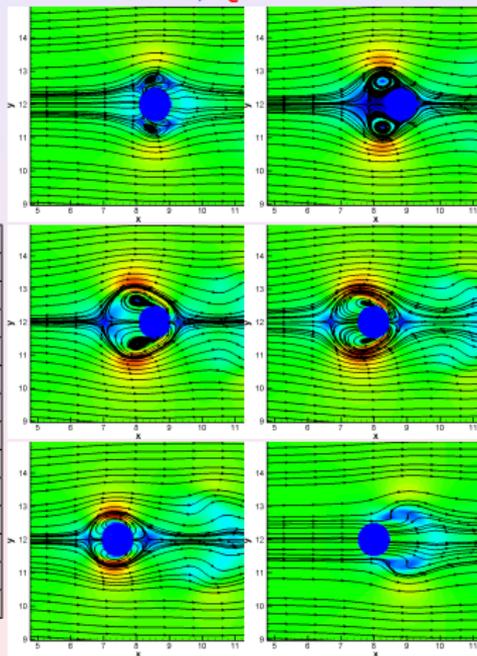
$$y_c = y_{c0},$$

Расчеты проводились на
 неравномерной сетке 240×296
 с шагом по времени $\Delta t = 0.005$.
 $V_\infty = 1.0$, $D = 1.0$, $Re = 100$,
 $A = 0.8D$, $S_e = 0.2$.

8

Таблица 3.
 Сравнение C_{xa}
 с результатами других
 исследователей

Сетка	C_{xa}
Dutsch (эксперимент)	
—	2.090
Данная работа	
240 × 296	2.075
Guilmineau & Queutey	
120 × 100	2.059
120 × 200	2.063
180 × 100	2.069
180 × 200	2.072
240 × 100	2.074
240 × 200	2.078
360 × 300	2.081
480 × 400	2.080



⁸ Dutsch H., Durst F., Becker S., Lienhart H. Low-Reynolds-number flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan-Carpenter numbers // J. Fluid Mech. — 1998. — № 360. — P. 249–271.

Ветровой резонанс кругового профиля

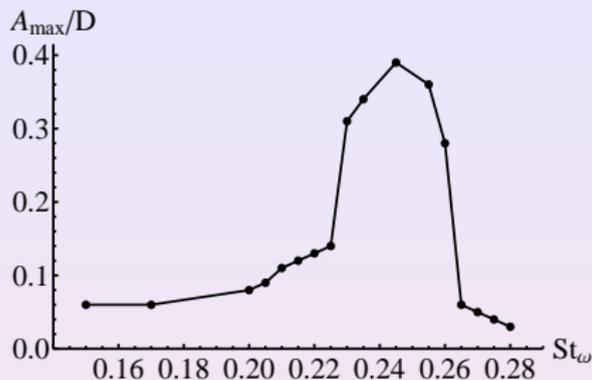


Рис. 9. Зависимость максимума амплитуды колебаний A_{\max}/D кругового профиля от безразмерной собственной частоты колебаний системы St_{ω} при $Re = 1000$

Движение профиля описывается уравнением

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = F_y,$$

- m — масса профиля,
- b — коэффициент демпфирования,
- c — жёсткость связи,
- F_y — подъёмная сила,
- y — отклонение профиля от положения равновесия.

$$V_{\infty} = 3.0, D = 1.0, Re = 1000, m = 39.75, b = 0.731^a,$$

$$St_{\omega} = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{D}{V_{\infty}} = 0.150, \dots, 0.280, \omega \approx \sqrt{c/m}.$$

Расчеты проводились на неравномерной сетке 272×292 с шагом по времени $\Delta t = 0.0001$.

Полученные результаты хорошо согласуются с известными экспериментальными и расчётными данными.

^a Klamo J. T., Leonard A., Roshko A. On the maximum amplitude for a freely vibrating cylinder in cross flow // J. Fluid Struct. — 2005. — № 21. — P. 429–434.

Ветровой резонанс кругового профиля

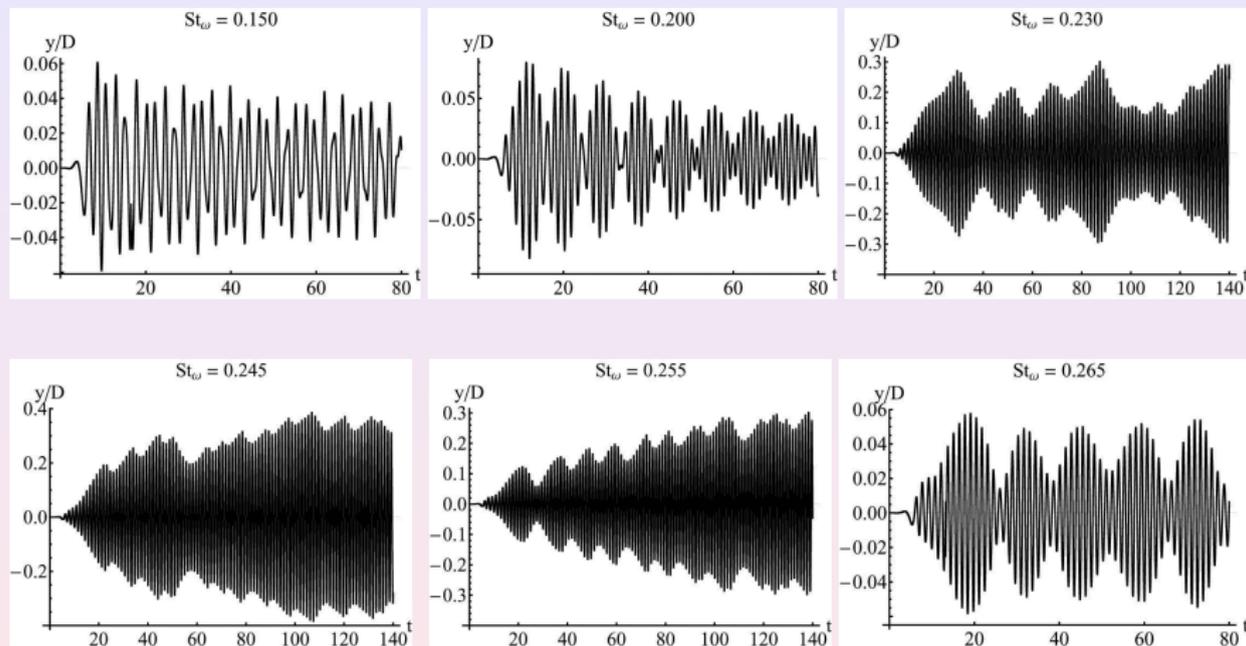
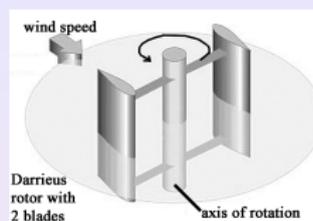
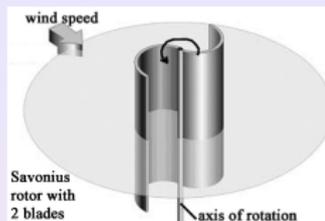
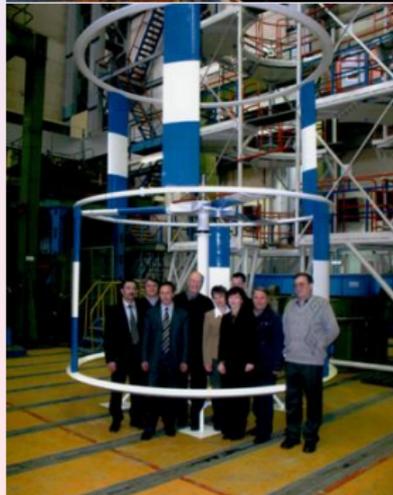


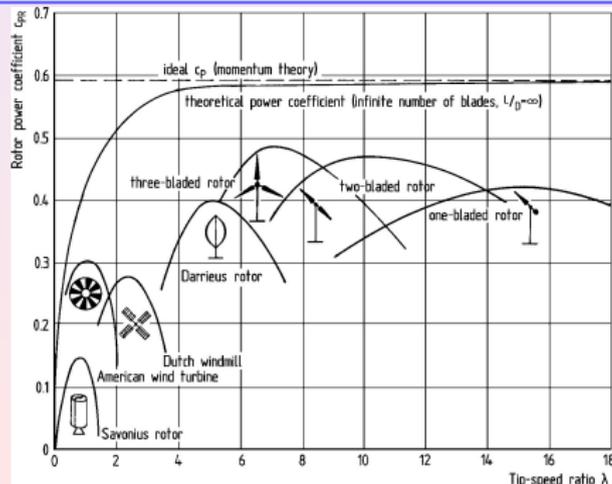
Рис. 10. Отклонение от положения равновесия кругового профиля при $Re = 1000$ и различных значениях безразмерной собственной частоты колебаний системы St_ω .

Роторы ВЭУ



Быстроходность $\lambda = \frac{\text{скорость наиболее удалённой от оси точки ротора}}{\text{скорость ветра}}$

Коэффициент использования энергии ветра $c_{PR} = \frac{\text{мощность ротора}}{\text{мощность потока}}$



Вращение роторов ВЭУ

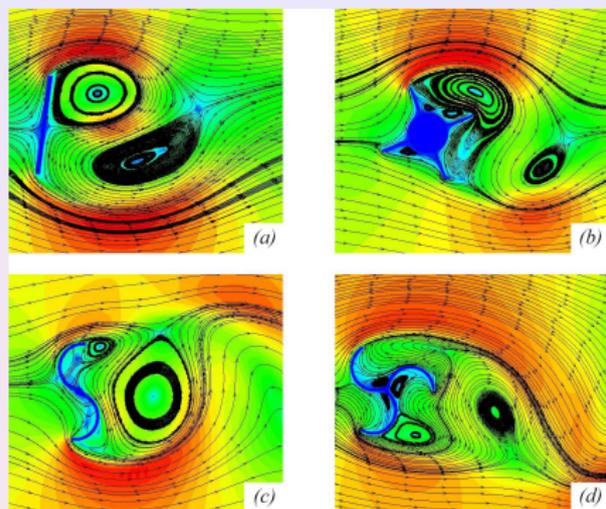


Рис. 11. Обтекание роторов различных форм при $Re = 100$: (a) пластина; (b) пропеллер с 4 лопастями; (c) ротор Савониуса с 2 лопастями; (d) ротор Савониуса с 3 лопастями.

Движение ротора описывается уравнением

$$I\ddot{\phi} + k\dot{\phi} = M^{\text{flow}},$$

- I — полярный момент инерции ротора,
- k — коэффициент вязкого трения в оси,
- M^{flow} — аэродинамический момент,
- ϕ — угол поворота ротора.

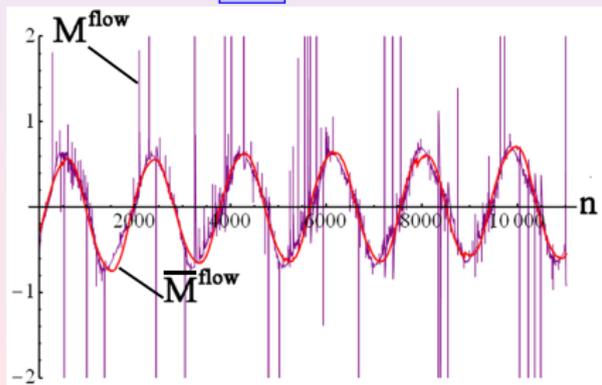
Качественные оценки на грубых сетках

- определение областей сгущения сетки;
- предсказание динамики конструкции в потоке;
- оценка числа Куранта.

✗ На грубой сетке могут возникать большие флуктуации M^{flow} .

⇒ Значения M^{flow} нужно фильтровать.

⇒ $\overline{M}^{\text{flow}}$



Выбор фильтра

1 КИХ-фильтр: усредняющий фильтр 1000-го порядка

✗ высокий порядок ⇒ высокая вычислительная стоимость

2 БИХ-фильтр: фильтр Баттерворта второго порядка

✓ максимально плоская АЧХ в полосе пропускания ⇒ не хуже КИХ-фильтра высокого порядка

✓ низкий порядок ⇒ низкая вычислительная стоимость

Авторотация и автоколебания пластины

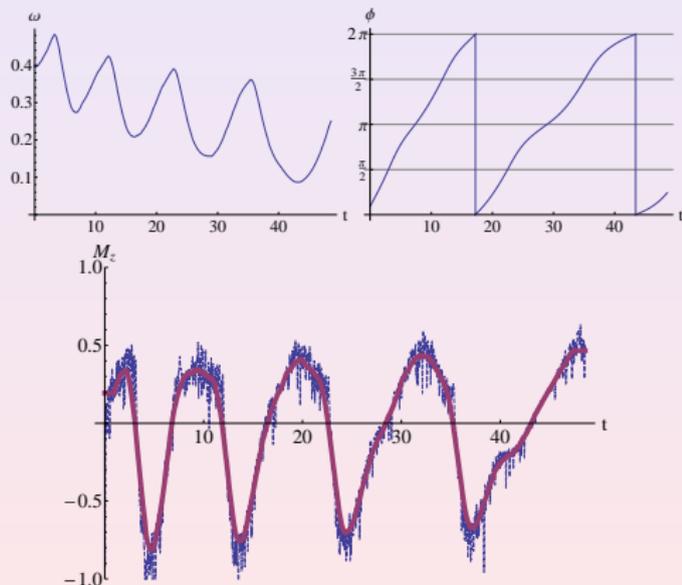
$$\text{Re} = 200, l = 10, k = 0.$$

Расчеты проводились на неравномерной сетке 272×292 с шагом по времени $\Delta t = 0.0001$.

Авторотация пропеллера

$$Re = 200, l = 10, k = 0, 2 \text{ лопасти.}$$

Расчеты проводились на неравномерной сетке 272×292 с шагом по времени $\Delta t = 0.0001$.



Авторотация ротора Савониуса с 2 и 3 лопастями

$$Re = 200, l = 10, k = 0.$$

Расчеты проводились на неравномерной сетке 272×292 с шагом по времени $\Delta t = 0.0001$.

Авторотация ротора Дарье с двумя лопастями

Граница профиля K задана набором точек $\{K_1, \dots, K_N\}$, $K_i = (x_{K_i}, y_{K_i})$, $i = \overline{1, N}$.

$$\text{Re} = 200, l = 10, k = 0.$$

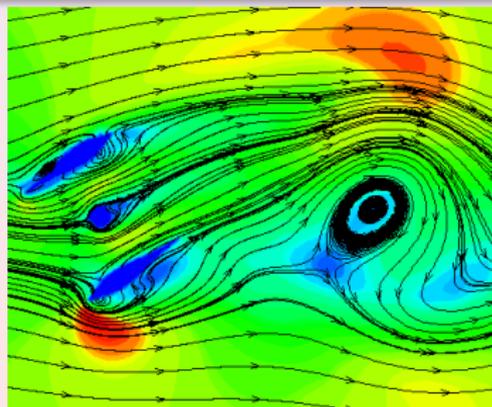
Для аппроксимации границы профиля используется кривая Безье:

$$P_K(t) = \sum_{i=0}^{N-1} y_{K_{i+1}} C_i^N t^i (1-t)^{N-i},$$

$$t \in [0, 1], t = t(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in [a, b], C_i^N = \frac{N!}{i!(N-i)!};$$

- возможность моделирования как гладких участков границы, так и острых кромок;
- сходимость производных;
- расстояние от произвольной точки до границы легко вычисляется.

Расчеты проводились на неравномерной сетке 272×292 с шагом по времени $\Delta t = 10^{-4}$.



Заключение

- Смоделированы явления ветрового резонанса кругового профиля и авторотации роторов ВЭУ.
- Приведённые расчёты показывают, что даже на сравнительно грубых сетках метод LS-STAG позволяет получить качественно и количественно верное решение.
- Разработанный программный комплекс является переносимым и позволяет производить расчёты на вычислительных комплексах различных типов.
- **Направления дальнейших исследований:**
 - ✓ дополнение метода LS-STAG моделью турбулентности для расчёта течений при высоких числах Рейнольдса ($Re > 10^5$);
 - ✓ модификация метода для расчёта течений вязкоупругих и неньютоновых жидкостей;
 - ✓ обобщение метода на трёхмерный случай.



