

V Международная
конференция «Облачные
вычисления. Образование.
Исследования. Разработка».
Москва, 2014

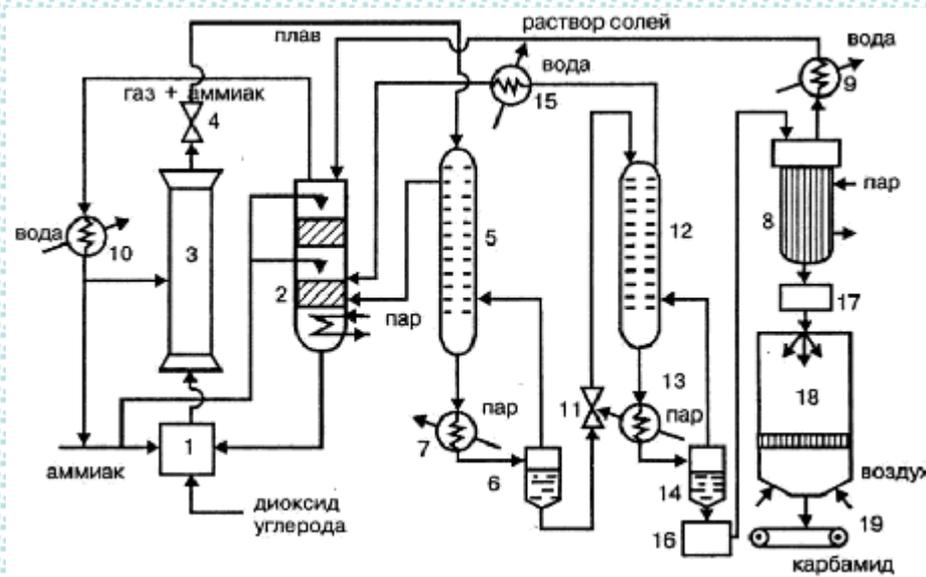
**Оценка сложности крупноблочных облачных
вычислений, использующих арифметику
повышенной точности**

Толстых С.С., Подольский В.Е.

ФГБОУ ВПО Тамбовский государственный технический университет

Стадия структурной идентификации решаемой в облаке задачи

Исходная система (на примере): S_0



ОВС – облачная
вычислительная
система

↓ $\text{Str}(S_0): S_0 \longrightarrow G_0$ структуризация

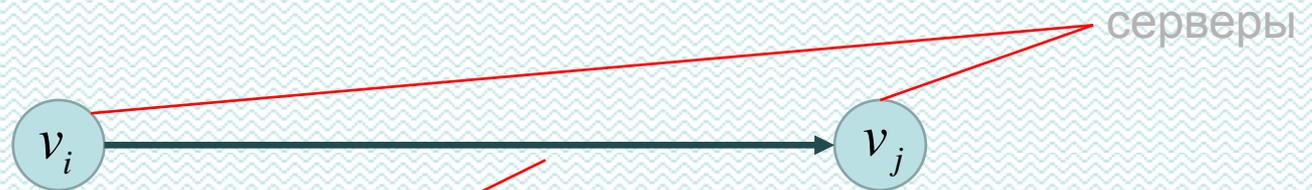
$$G^{(0)} = (V^{(0)}, D^{(0)}, \Gamma^{(0)})$$

↓ Синтез ОВС

$$G(G^{(0)}) = G = (V, D, \Gamma)$$

Задача о нахождении оптимальной структуры ОВС

$$(G^* \equiv (V^*, D^*, \Gamma^*)) = \text{Arg min}_G \theta(G(G^{(0)}))$$



$\gamma_k := d_k = (v_i \rightarrow v_j)$ - вычислительная нагрузка дуги

$$\gamma_k = I(d_k) \times \frac{\bar{E}_{\theta,k} + \theta(d_k)}{\theta(d_k)} \times \frac{\bar{E}_{T,k} + [T(d_k)]^{l_k}}{T(d_k)}$$

$\theta(d_k)$ - Вычислительная сложность перехода из v_i в v_j

$I(d_k)$ - Число переменных, участвующих в организации итерационного процесса, при условии, что эта дуга разрывается

$T(d_k)$ - Число разрядов в мантиссе $\bar{E}_{\theta,k}$ - мера адекватности мат. описания

$\bar{E}_{T,k}, l_k$ - Параметры роста выч. сложности при увеличении размерности решаемой задачи

Дуга, расчетный модуль, пример

Дуга d_k : информационно-вычислительный поток

Вектор входных параметров

$$\mathbf{A}^{(k)} = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_{r_k}^{(k)})^T$$

Вектор переменных состояния

$$\mathbf{Z}^{(k)} = (z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \dots, z_{q_k}^{(k)})^T$$

Расчетный модуль $M_k(\mathbf{Z}^{(k)}; \mathbf{A}^{(k)})$

$$\overset{\times}{W}_k = \overset{\times}{W}_k(\mathbf{A}^{(k)}, M_k)$$

Дуга d_k : информационно-вычислительный поток:

Вектор входных параметров

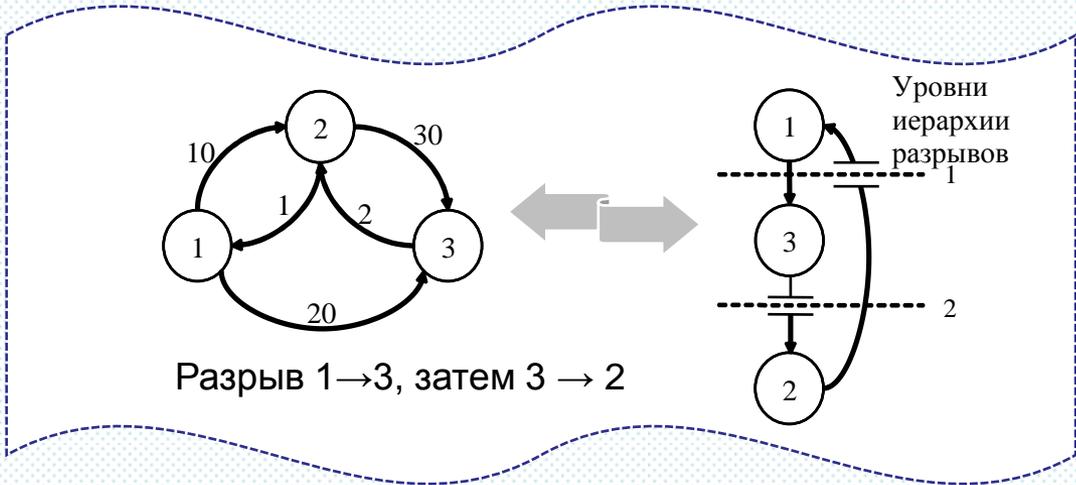
$$\mathbf{A}_k = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)})^T$$

Вектор переменных состояния

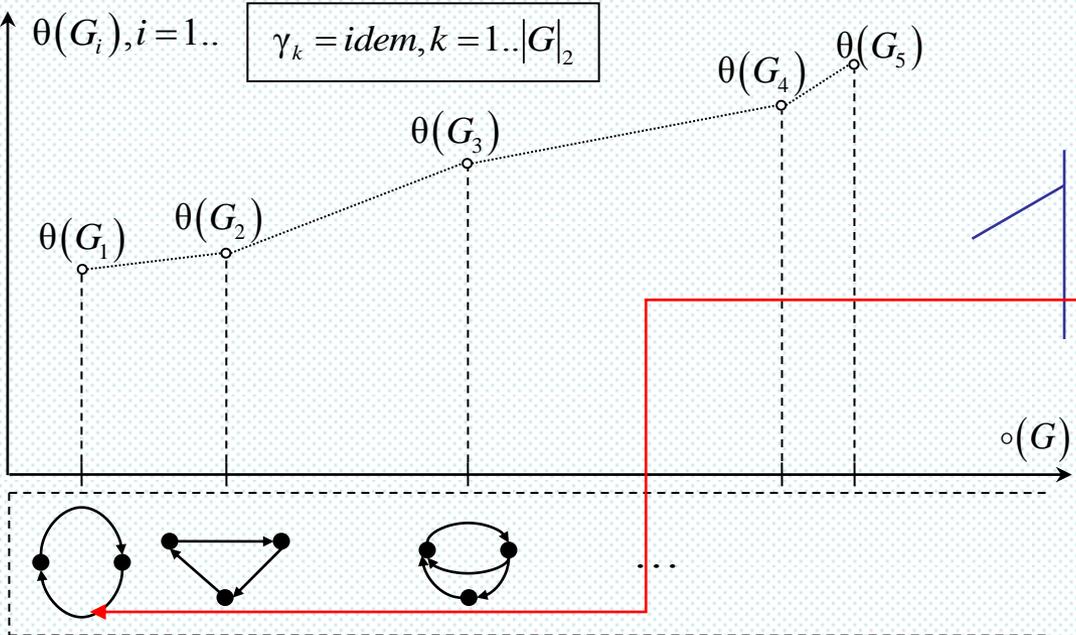
$$\mathbf{Z}^{(k)} = (z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, z_3^{(k)}, z_4^{(k)}, z_5^{(k)})^T$$

$$\begin{cases} z_1^3 + a_1 z_2^3 + z_3^2 z_1^3 - 2z_4^3 z_5^2 = a_2, \\ z_1 - 3z_2 - z_3^2 + z_4^2 z_5^3 z_1 = 0, \\ 5z_1 - z_1 z_4 - 2z_1^2 z_3^3 z_2 + z_5 = 0, \\ 3z_1^2 + z_2 + z_3^2 z_4^3 + z_3 z_5 = a_1, \\ 10z_1 + a_2 z_2^3 + z_3^3 + 2z_4 z_5 = a_2 \end{cases}$$

Гипотезы построения шкал сложности ОВС



Интуитивный уровень оценки сложности: разрывы для устранения сильной связности, построение иерархии разрывов как основа расчетов в ОВС



При нивелировании параметричности чем больше дуг в орграфе, тем он дальше от **простейшего диполя**

Необходим некий инвариант для построения оси абсцисс

Инварианты орграфов R и R_0 .

множественная конкатенация

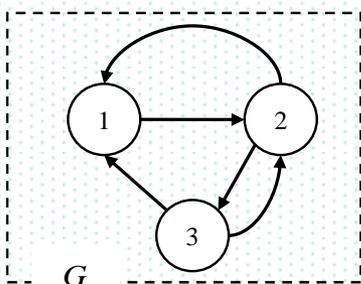
“” – пустая строка, «.» - конкатенация

$$R(G) = R_0(G) + R_1(G), R_0(G) = 0 + \left[\begin{matrix} n & n \\ i=1 & j=1 \end{matrix} \left(\left\{ \begin{matrix} i = j \Rightarrow \text{""} \\ i \neq j \Rightarrow \text{""} \cdot x_{ij} \end{matrix} \right\} \right) \right], R_1(G) = \sum_{i=1}^{|G|_2} 2^{i+k-1},$$

$$k = \left\lfloor \log_2 R_0(\widehat{G}) + \frac{1}{2} \right\rfloor, \widehat{G} = \text{con}(\widehat{\mathbf{X}}), G = \text{con}(\mathbf{X}), \dim \mathbf{X} = \dim \widehat{\mathbf{X}}, \widehat{x}_{ij} = 1, i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, n = |G|_1$$

где $a = \text{con}(b)$ – "a конкретизируется b"

Пример



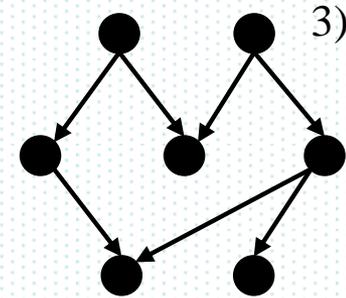
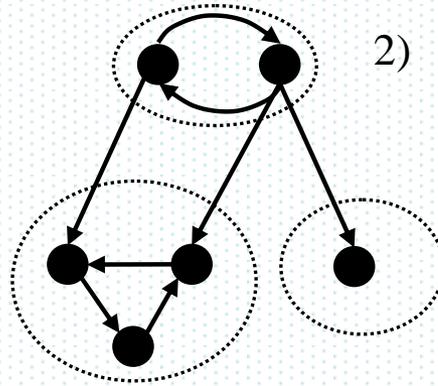
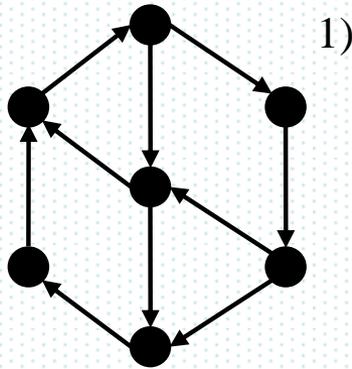
$\Rightarrow \mathbf{X} =$

	1	
1		1
1	1	

$\Rightarrow R_0(G) = 111101_2 = 61$

$$R_0(\widehat{G}) = 63, k = \lfloor \log_2 63 + 1/2 \rfloor = 6 \Rightarrow R_1(G) = 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} = 1984 \quad R_0(G) = 61 + 1984 = 2045$$

Варианты остаточного орграфа после разрыва дуги



1. Орграф остается сильно связным
2. Дерево бикомпонент
3. Дерево вершин

Оценить сложность дерева вершин и выйти из рекурсии

Продолжить рекурсию

Оценить сложность каждой бикомпоненты и сделать свертку оценок

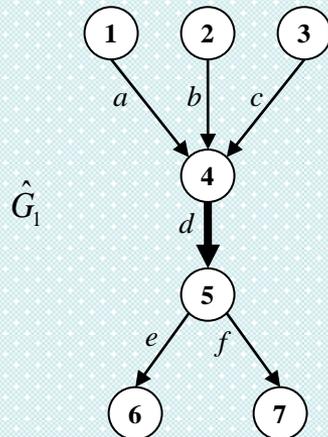
Оценка сложности ОВС с древовидной структурой

1. Вариант N 1 – суммарный вес дуг (вычислительная емкость)

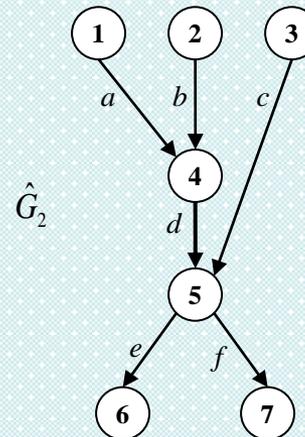
$$\theta^{(1)}(\hat{G}) = \sum_{k=1}^{|\hat{G}|_2} \gamma_k,$$

2. Вариант N 2 – с учетом загруженности всевозможных путей от начального уровня к конечному

$$\theta^{(2)}(\hat{G}) = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^{|P_k|} \hat{\gamma}(P_{k,j}),$$



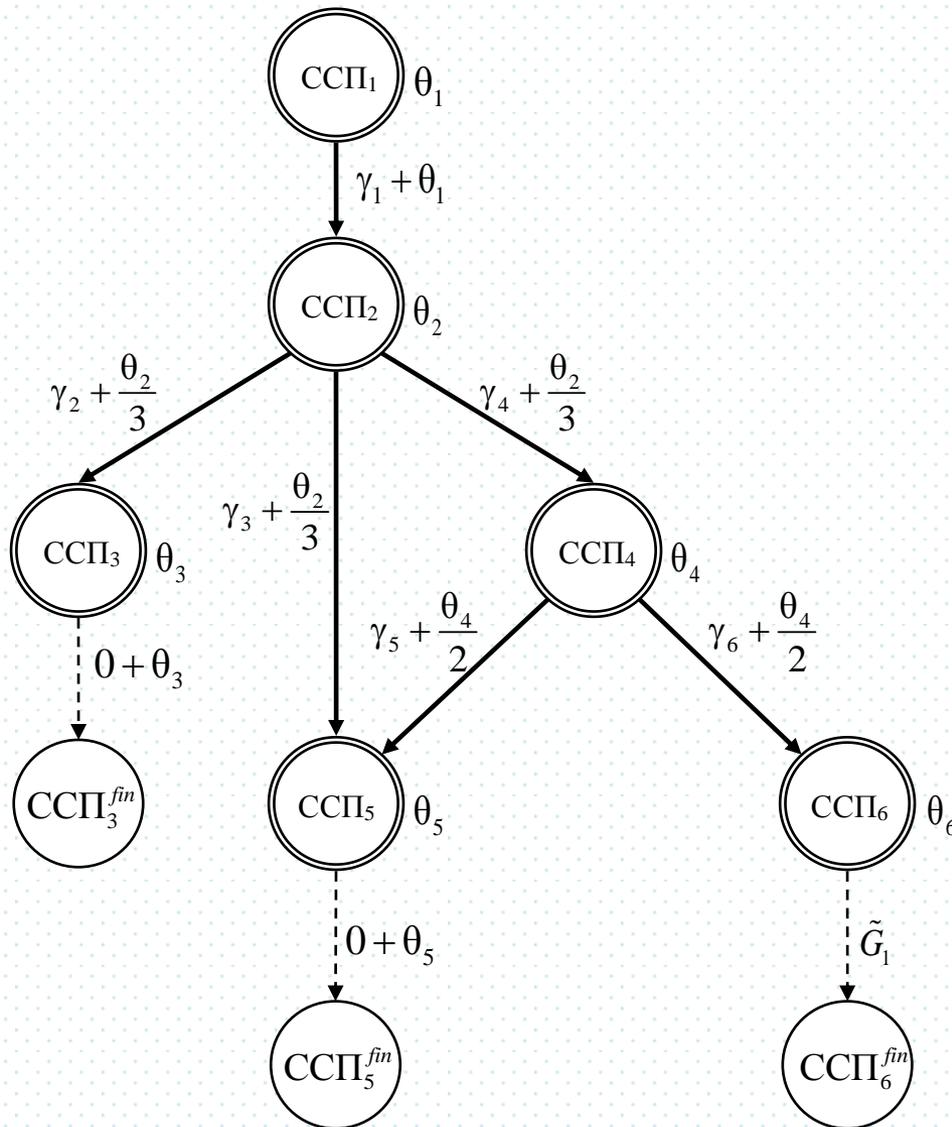
$$\theta^{(2)}(\hat{G}_1) = 2a + 2b + 2c + 6d + 3e + 3f$$



$$\theta^{(2)}(\hat{G}_2) = \theta^{(2)}(\hat{G}_1) - 2d$$

Оценка сложности дерева ССП (сильно связанных подсистем)

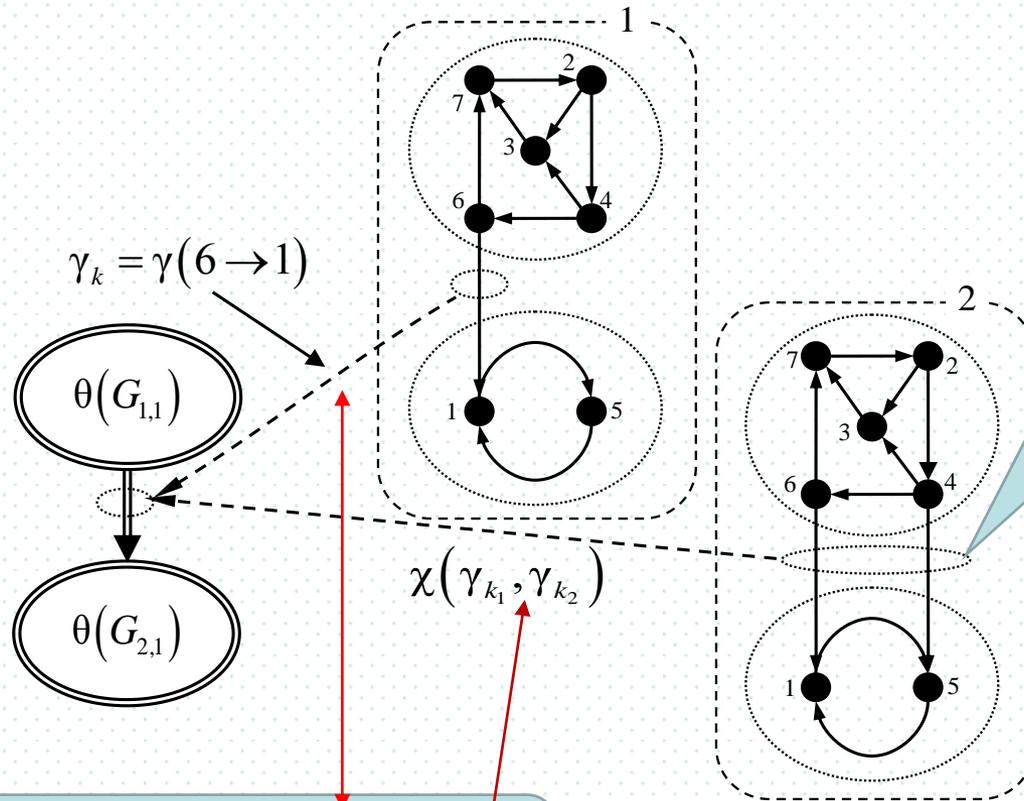
(на примере)



1. Находим оценки сложности для каждой ССП
2. К параметричности последующего уровня иерархии добавляется сложность родительских подсистем, деленная на число исходящих дуг

Функторы агрегирования дуг в дереве ССП

Функтор, верифицированный в ОВС: параметричности агрегированной дуги суммируются



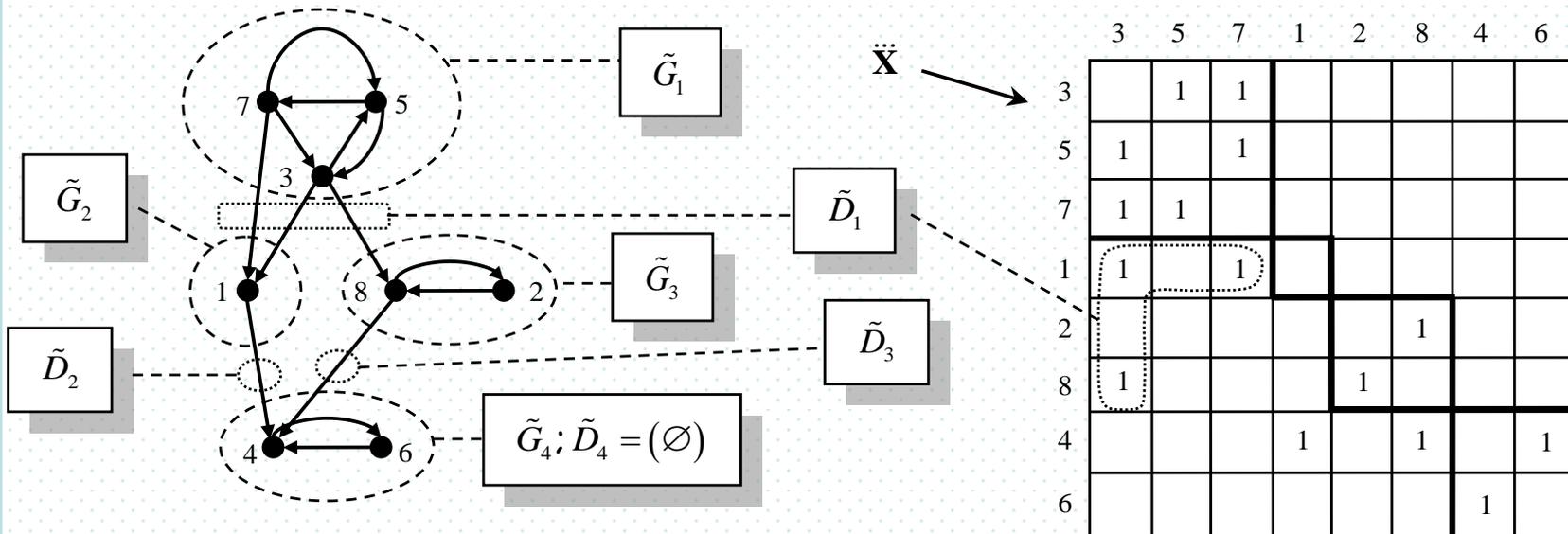
В случае, когда ССП связаны одной дугой (1), агрегирование не требуется, но, если дуг больше 1 (случай 2), необходим функтор агрегирования

Поиск квазитреугольной формы матрицы смежности – путь к верификации функторов агрегирования

$$\textcircled{1}: \lambda(\beta) \equiv \left\{ \left(\text{bic}(\tilde{G}_i \setminus \tilde{D}_i) = 1, i = 1.. \beta \right) : \left(\bigcup_{i=1}^{\beta} (\tilde{G}_i \cup \tilde{D}_i) = G \right) \right\} = 1 \quad \wedge$$

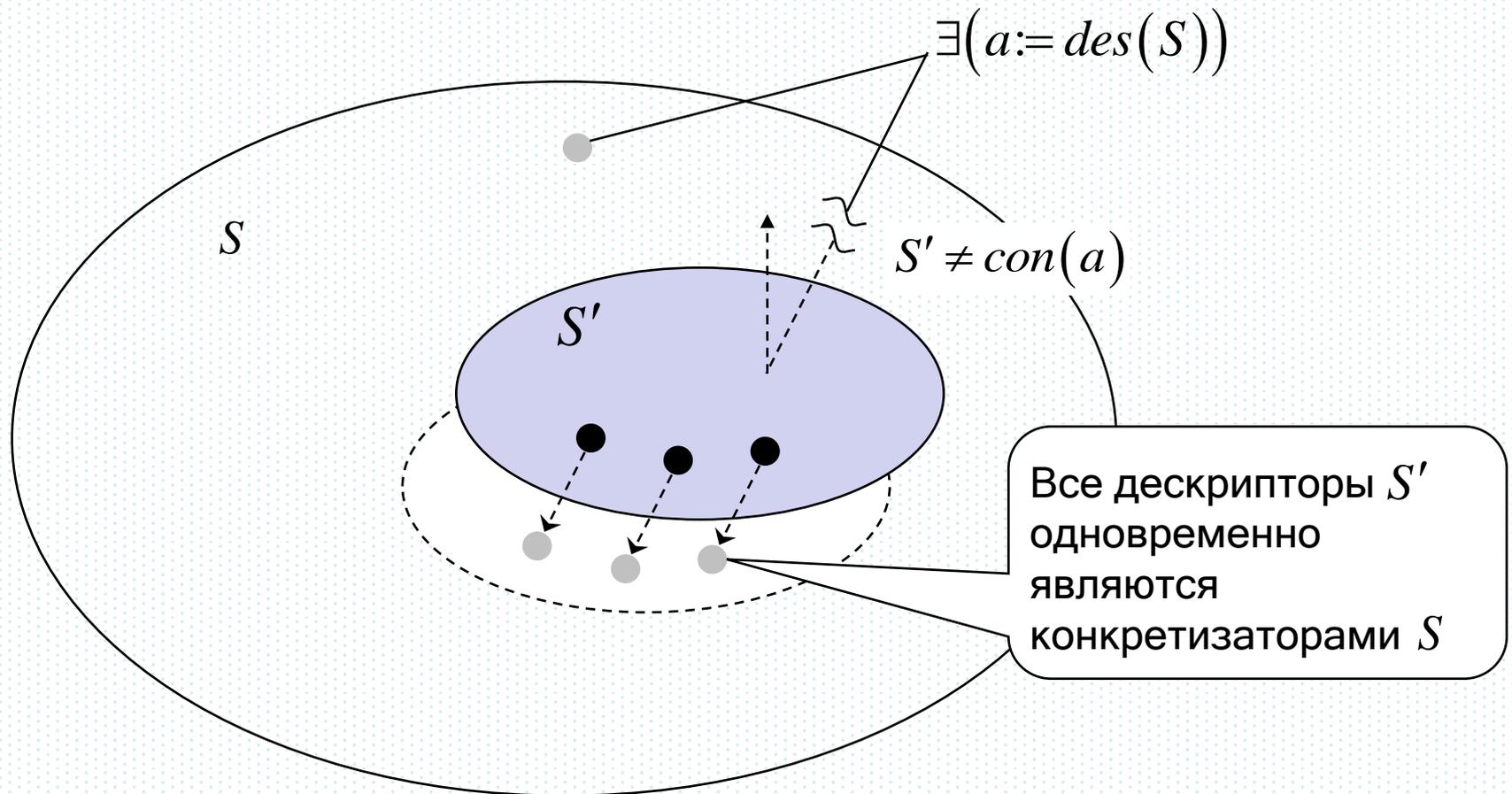
$$\forall \beta_1 < \beta : \lambda(\beta_1) = 0, \tilde{D}_i := \tilde{G}_i, \tilde{D}_i = (d_j^{(i)}, j = 1.. \Upsilon_i), \ddot{\mathbf{X}}^T := \bigcup_{i=1}^{\beta} (\tilde{G}_i \cup \tilde{D}_i),$$

$$\textcircled{2}: \tilde{G}_1 \prec \tilde{G}_2 \prec \dots \prec \tilde{G}_{\beta} : \forall j \in \{1, \beta-1\} : \exists l > j : \exists k, \left[(d_k = (v_{k_1} \rightarrow \circ)) : v_{k_1} \in \tilde{G}_i \right],$$



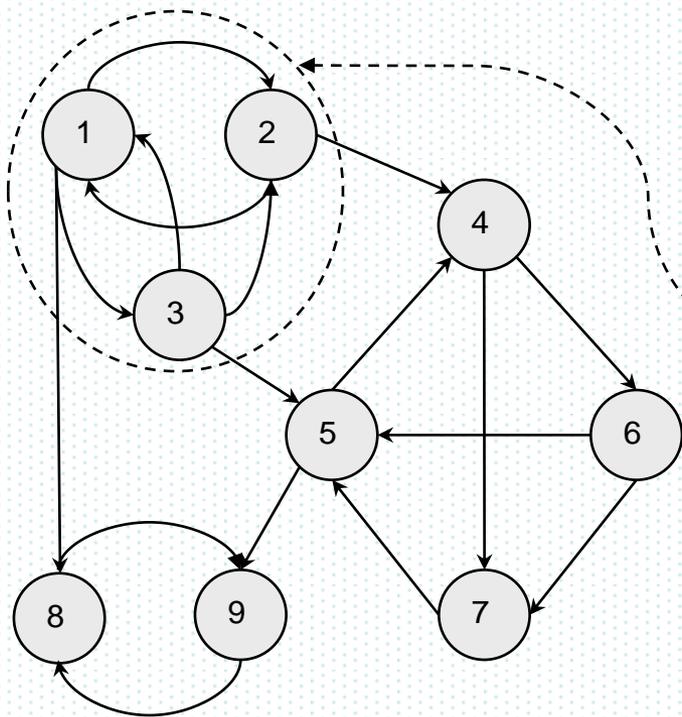
Определение подсистемы

$$(S' \subset S) \Leftrightarrow \left((\exists (a := des(S)) \mid S' \neq con(a)) \Rightarrow (\nexists (b := des(S')) \mid S \neq con(b)) \right)$$



**Матрица
достижимости:**

$$\mathbf{H} = (h_{ij})_n; h_{ij} = (\exists k_l, l = 1..o : \exists (i \rightarrow k_1), (i \rightarrow k_2), \dots, (i \rightarrow k_o)) \Rightarrow 1 \text{ в } 0$$

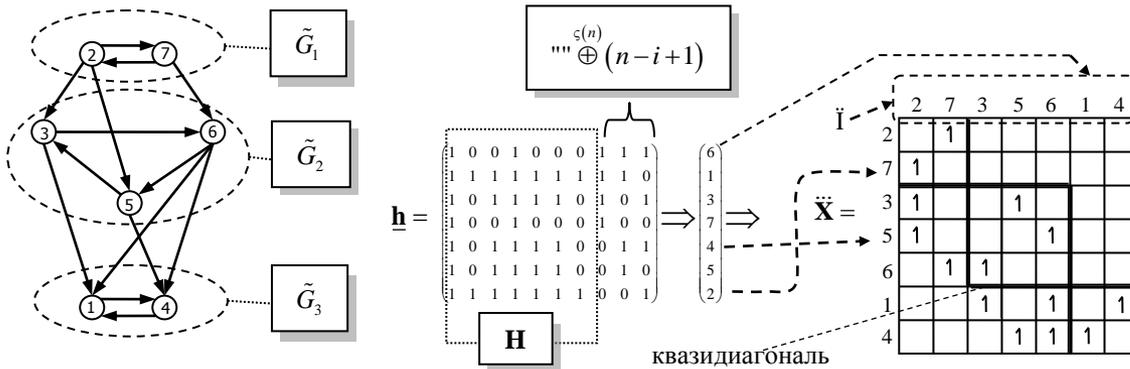


	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4				1	1	1	1	1	1
5				1	1	1	1	1	1
6				1	1	1	1	1	1
7				1	1	1	1	1	1
8								1	1
9								1	1

Если $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij} = n^2$ \implies граф сильно связный

По матрице достижимости строим вектор строк битовых символов (0 или 1)

$$\underline{\mathbf{h}} = (\underline{h}_i)_{n \times 1} \diamond \underline{h}_i = \left(\begin{matrix} n \\ \cdot \\ j=1 \end{matrix} \left(\text{""} + h_{ij} \right) \right) \cdot \left(\text{""} \oplus (n-i+1) \right) \diamond \zeta(n) = 1 + \lceil \log_2 n \rceil_0$$



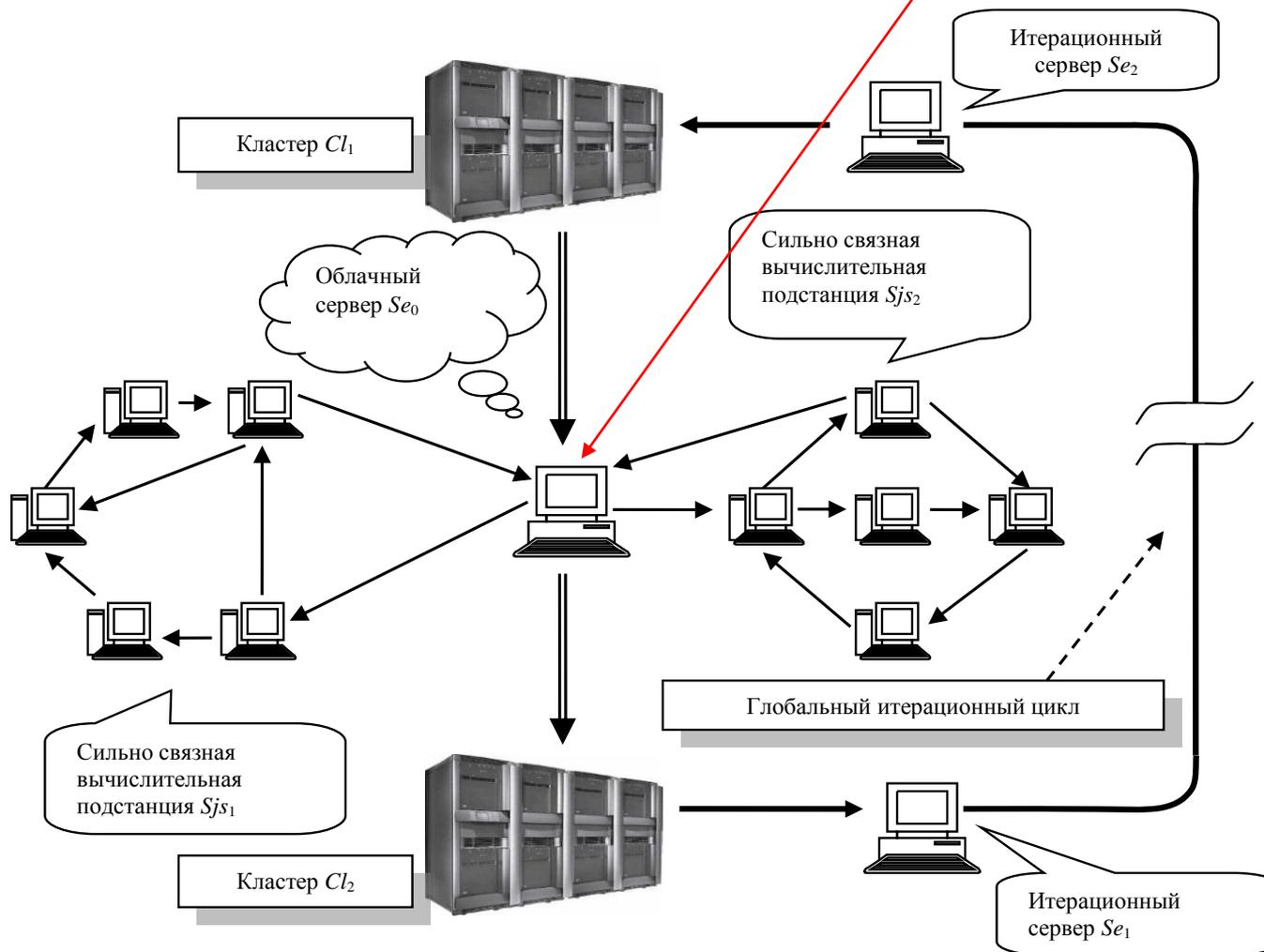
$$Dec = \left(\begin{matrix} \ddot{i}: 0 + \underline{h}_{i_j} \geq 0 + \underline{h}_{i_{j+1}}, j=1..n-1 \Rightarrow \lambda(k) = 0 + \sum_{j=1}^n h_{kj} \\ \left(\begin{matrix} (\forall k \in \ddot{i}_{l, \tilde{G}_i} : \lambda(k) = idem; \\ l = 1 + \left[(0 ::= (i=1)) \vee \sum_{j=1}^{i-1} |\tilde{G}_j| \right] \wedge \\ W_i = \bigcup_{k=1}^{\circ} \left[G \left((v(\underline{d}_k), v(\bar{d}_k)), (d_k), (\gamma(d_k)) \right) : \right. \\ \left. \underline{d}_k \in \tilde{G}_i, \bar{d}_k \notin \tilde{G}_i \right] \end{matrix} \right), i = 1.. \beta \end{matrix} \right)$$

\ddot{i}	$\lambda(k) = idem$
2	0 + "1111111110" → 1022
7	0 + "1111111001" → 1021
3	0 + "1011110101" → 757
5	0 + "1011110011" → 755
6	0 + "1011110010" → 744
1	0 + "1001000111" → 583
4	0 + "1001000100" → 580

Антилексиграфический порядок кодов

Окончания битовых строк

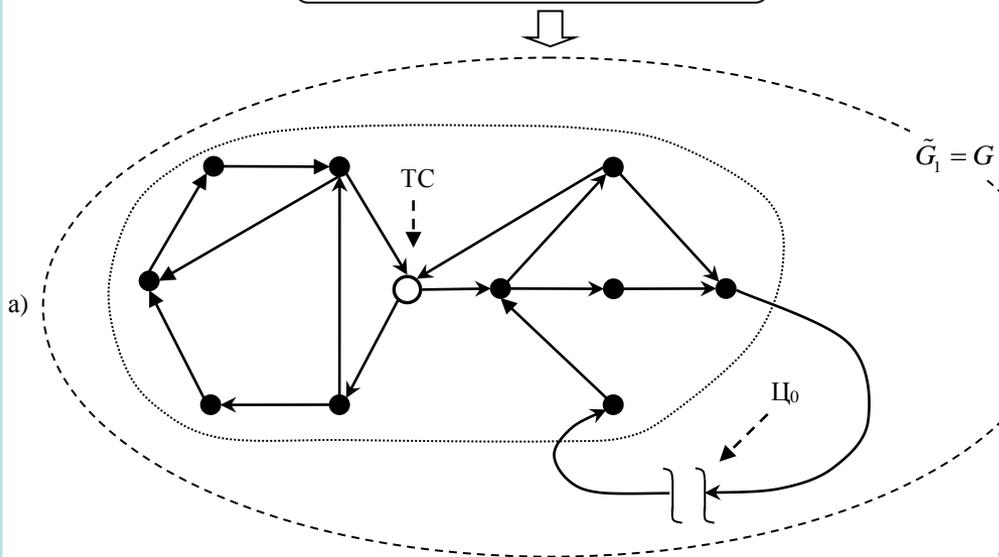
Поиск ССП при наличии точек сочленения в орграфе ОВС



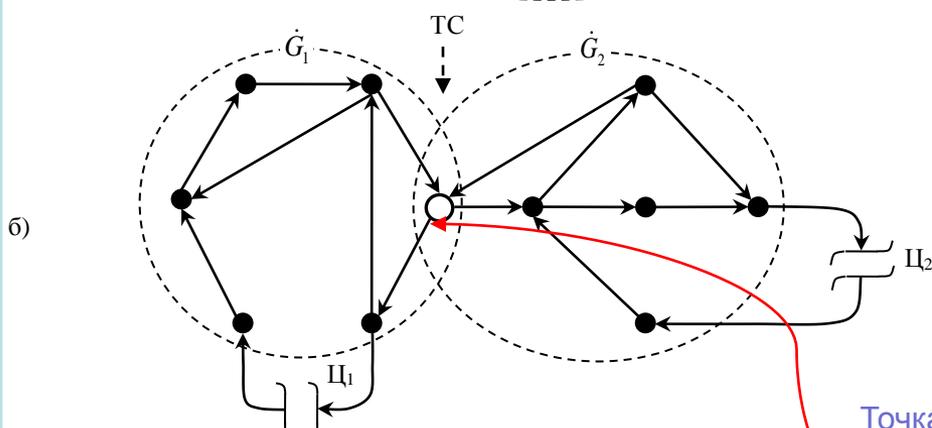
Поиск ССП при наличии точек сочленения в орграфе ОВС

$$\theta(\tilde{G}_1) = ?$$

$$\tilde{G}_1 := v(v(Sjs_1) \cup v(Se_1) \cup v(Sjs_2))$$

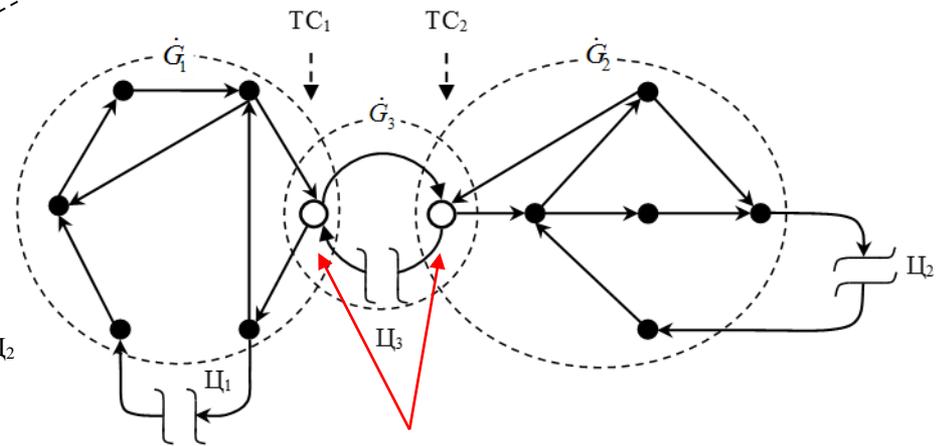


Проблема структурирования, при котором облачный сервер, наряду с вычислительными подстанциями, объединяется в единую бикомпоненту, заключаются в том, что все три элемента рассматриваются как единое целое; итерационные циклы могут содержать в себе **нежелательное ассоциирование** облачного сервера с вершинами, относящимися к вычислительным подстанциям



$$\theta(\dot{G}_1 \cup \dot{G}_2) = \theta(\dot{G}_1) + \theta(\dot{G}_2)$$

Точка сочленения \Leftrightarrow координатор вычислений двух и более КССП



Две точки сочленения – два облачных сервера – координируют работу удаленных кластеров

$$\lambda(d_{1..n_i}^{(i)}) = \left(\begin{array}{l} (\bar{d}_k^{(i)} = \underline{d}_{k+1}^{(i)}, k = \overline{1, n_i - 1} \wedge \underline{d}_1^{(i)} = \bar{d}_{n_i}^{(i)}) \wedge \\ \forall v_o := \bar{d}_k^{(i)}, k \in \{\overline{1, n_i - 1}\} : \exists j \neq k + 1 : v_o = \underline{d}_j^{(i)} \wedge \\ \underline{d}_1^{(i)} < \underline{d}_{2..n_i}^{(i)} \end{array} \right) \Rightarrow 1 \in 0$$

Условие
элементарности
контура



$$C(G) = \left(C_i(G) := \left(d_{1..n_i}^{(i)} \mid \lambda(d_{1..n_i}^{(i)}) = 1 \right), i = \overline{1, K} \right)$$

позволяет
сформировать кортеж
из таких контуров

$$\textcircled{1}: \lambda(\dot{\beta}) \equiv \left\{ \left(bic(\dot{G}_i) = 1, i = \overline{1.. \dot{\beta}} \right) : \left(\bigcup_{i=1}^{\dot{\beta}} \dot{G}_i = G \right) \right\} = 1 \wedge \forall \dot{\beta}_1 < \dot{\beta} : \lambda(\dot{\beta}_1) = 0,$$

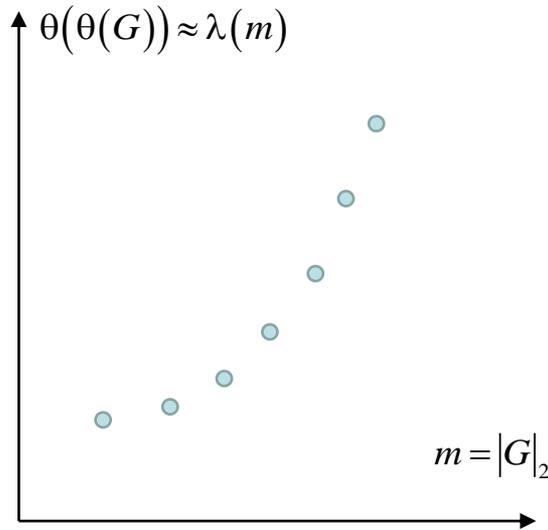
$$\textcircled{2}: \forall j, l \in \{\overline{1, \dot{\beta}}\}, l \neq j : C_{1..n_j}(\dot{G}_j) \cap C_{1..n_l}(\dot{G}_l) = \emptyset,$$

$$\textcircled{3}: \dot{G}_i < \dot{G}_{i_2..i_{\dot{\beta}}} : \forall j \in \{\overline{1, \dot{\beta} - 1}\}, \forall l \in \{\overline{2, \dot{\beta}}\}, l > j : C_i(\dot{G}_l) > C_i(\dot{G}_j).$$

Операторное
уравнение для поиска
контурных ССП в
орграфах с точками
сочленения

В основе решения – букетный алгоритм поиска ССП

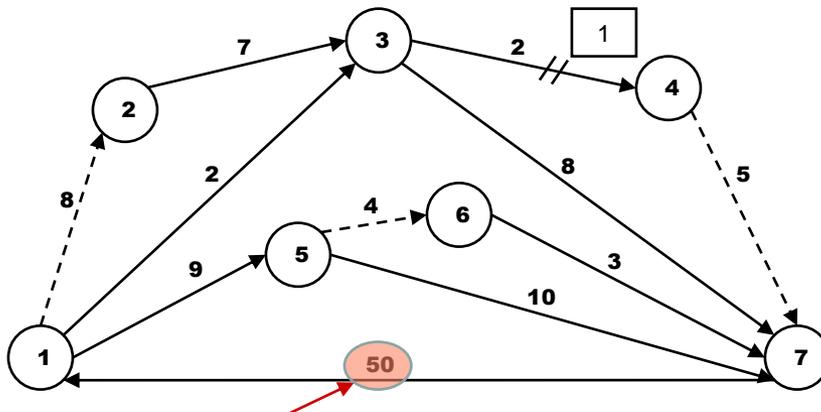
Структурно-параметрическая минимизация орграфа ОВС



Вычислительная сложность нахождения оценки вычислительной сложности растет по экспоненте от числа дуг орграфа

(если используется полный перебор разрываемых дуг)

Пример с гамаком



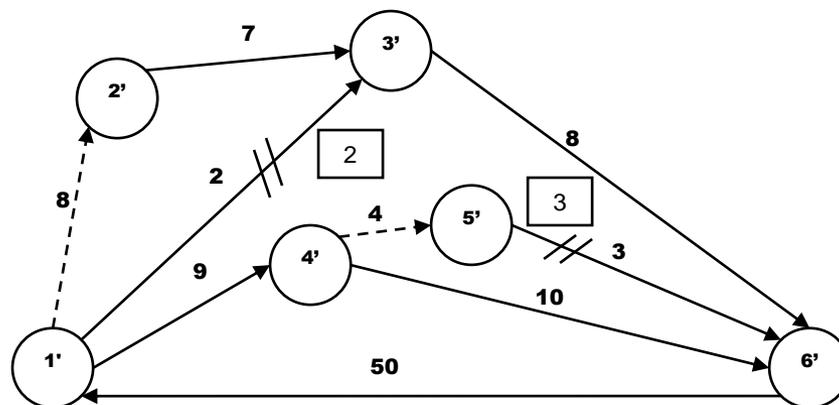
-----> Дуга, бесперспективная к пробному разрыву

1 Первый разрыв

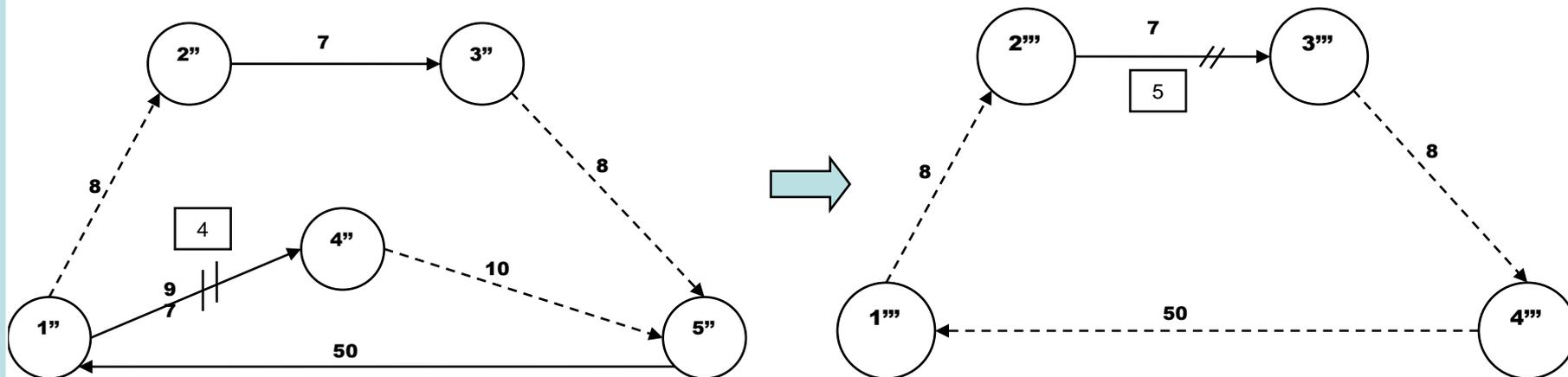
Кардинально перспективная дуга имеет излишне большой вес, чтобы участвовать в декомпозиции орграфа

Структурно-параметрическая минимизация орграфа ОВС

Орграф после разрыва дуги $3 \rightarrow 4$. Показаны следующие 2 разрыва: $1' \rightarrow 3'$, $5' \rightarrow 6'$:



В итоге:



Обобщенная дуга верифицируется операторным уравнением:

$$d^* := \left(\underline{d}^* \rightarrow \bar{d}^* \right) = \text{con} \left(\begin{array}{l} \xrightarrow{i=1}^{m^*} (d_i \in D^* : E(D^*) = 1), \\ \gamma^* = \min_{1 \leq i \leq m^*} \gamma(d_i), \underline{d}^* = d_1 \in D^*, \bar{d}^* = d_{m^*} \in D^* \end{array} \right)$$

функтор E определяет минимальный по мощности кортеж дуг \check{D}^* , без которых кортеж D^* становится транзитивной ветвью

$$E(D^*) = \left(\exists \check{D}^* \in D^* : E(D^* \setminus \check{D}^*) = 1 \wedge |\check{D}^*| = \min_{\circ} |\check{D}^*| \right) \Rightarrow \check{D}^* \subset \emptyset$$

Для процедурной модели СПМ потребуется предикат, который выявляет скрытую параллельность обобщенной дуги d^* орграфа G и изначальной дуги $d_k \in D, k = 1..m$

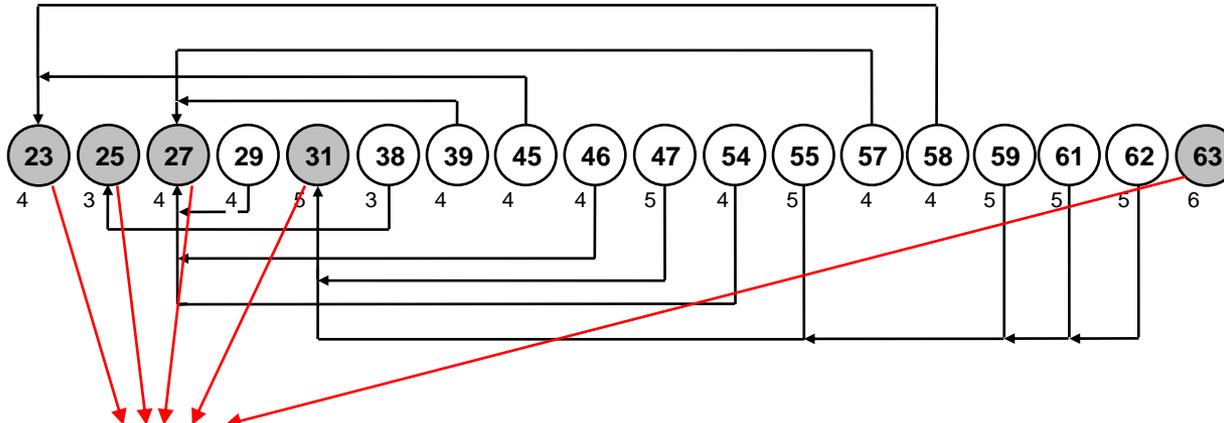
$$Q(d^*, d_k) = \left(\underline{d}_1^* = \underline{d}_k \wedge \bar{d}_{m^*}^* = \bar{d}_k \right) \Rightarrow 1 \subset 0.$$

Склеивание параллельных дуг оформим в виде двуместной операции « \otimes », а именно

$$d^* \otimes d_k : (d^*, d_k) \rightarrow \left(\left(\underline{d}_k \rightarrow \bar{d}_k \right) = \text{con} \left((d^*, d_k) \bar{\wedge} \left(\gamma^* := \gamma^* + (\gamma_k = \text{des}(d_k) \in G') \right) \right) \right).$$

Оценка сложно сильно связанных примитивов – основа каталогизации орграфов ОВС

Коды $R_0(G)$ орграфов с тремя вершинами и число дуг (внизу)

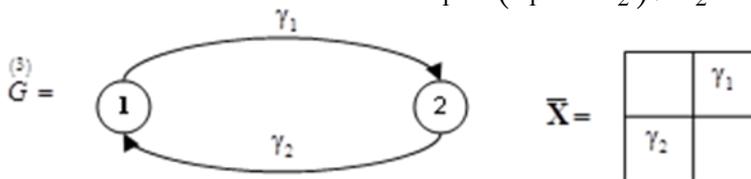


Взаимно неизоморфные
орграфы помечены серым
фоном.

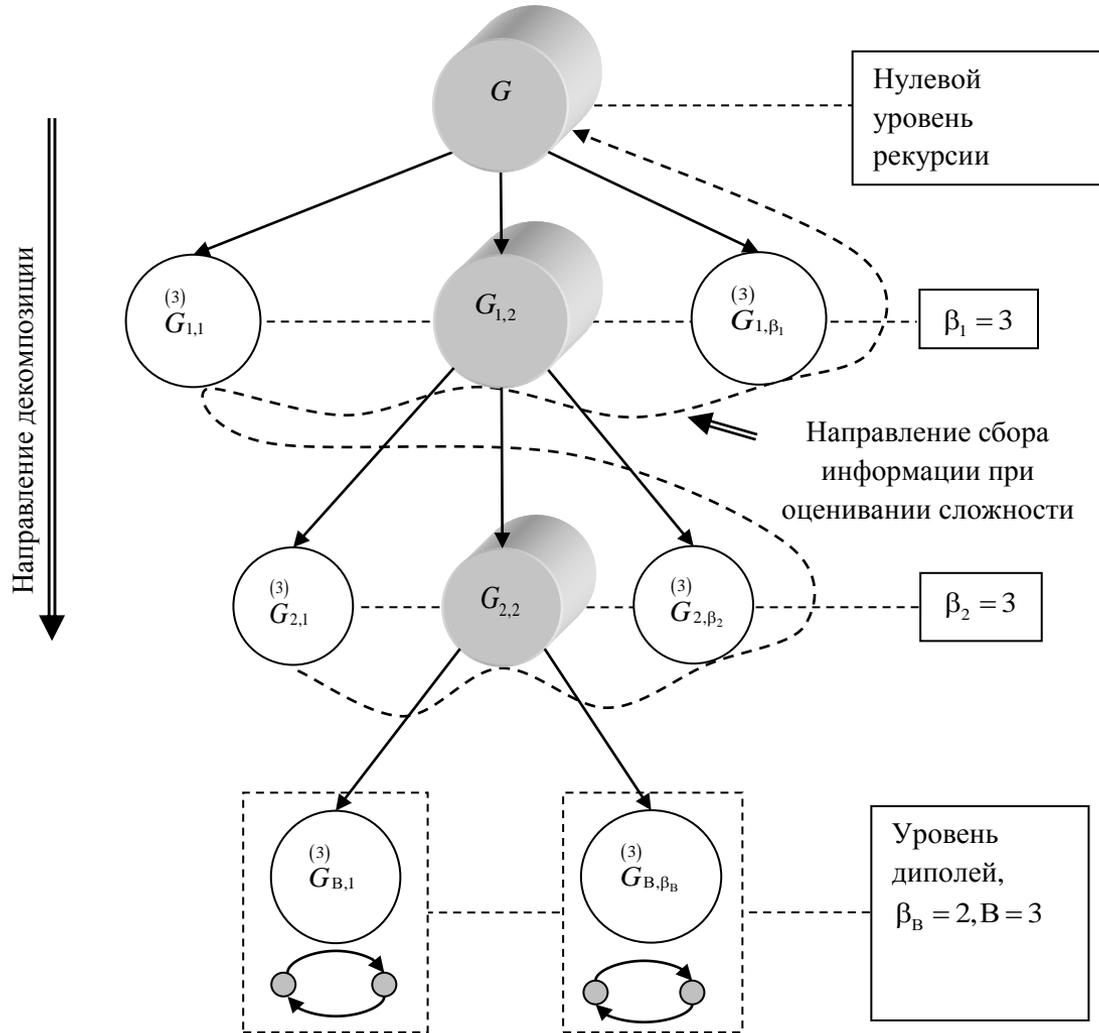
Нижний уровень
каталога орграфов

Фундамент каталога
орграфов - диполь

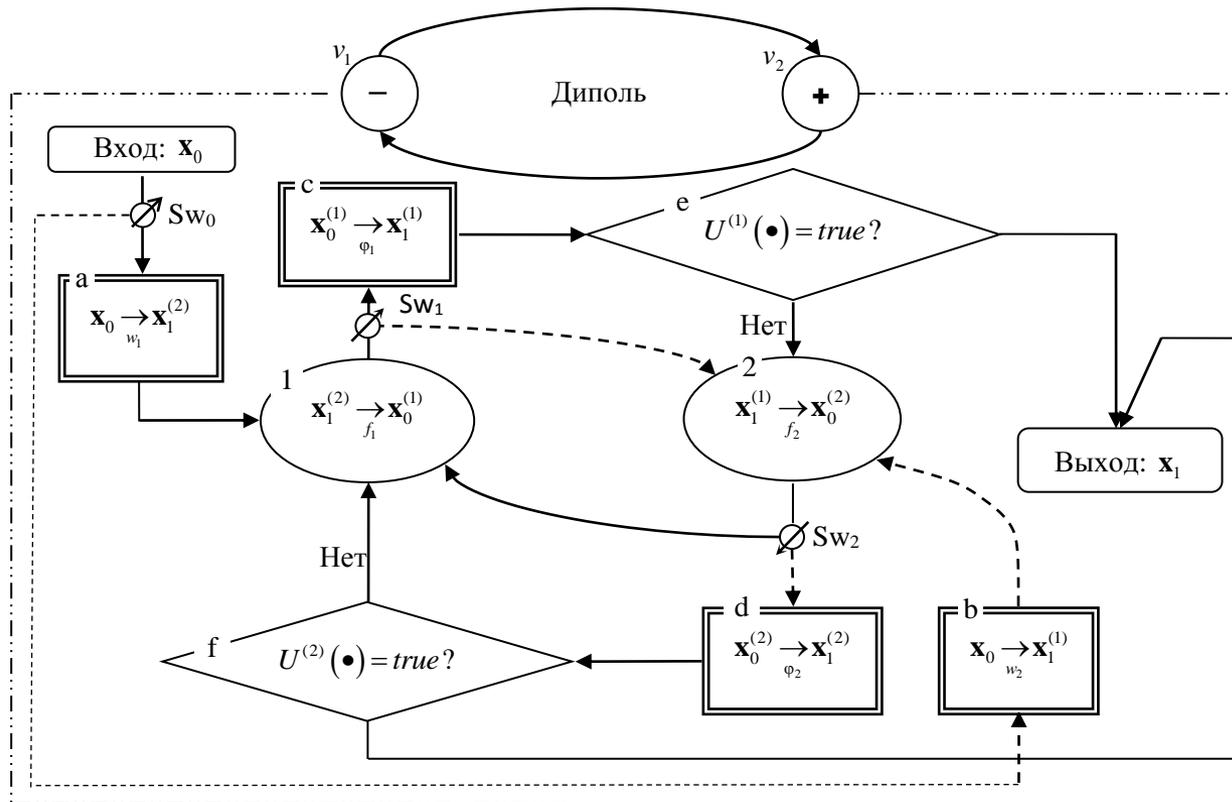
$$\begin{aligned}
 &^{(3)}G = (V, D, \Gamma), V = (v_1, v_2), D = (d_1, d_2), \\
 &d_1 = (v_1 \rightarrow v_2), d_2 = (v_2 \rightarrow v_1), \Gamma = (\gamma_1 := d_1, \gamma_2 := d_2).
 \end{aligned}$$



Оценка сложно сильно связанных примитивов – основа каталогизации орграфов ОВС



Вариативность работы диполя может быть обусловлена динамикой расчетов:



Оценка сложности диполя: $\theta \left(G^{(3)} \right) = \min \left\{ \gamma_1 (1 + \gamma_2), \gamma_2 (1 + \gamma_1) \right\}$

Оценка сложно сильно связанных примитивов – основа каталогизации орграфов ОВС

Лист 4

Для исследования диполя создана специальная программа (на Visual C++)

Исследование вычислительного диполя - режим СЛАУ-СЛАУ

Тип данных
 double
 LongReal
 HReal

Виды исследований
Одна дуга - один метод решения СЛАУ
Мантисса - Шаг +

Дуга 1->2
Размерность СЛАУ - Передается в 2->1
Шаг + Метод Гаусса 2 - 10

Дуга 2->1
Размерность СЛАУ 10 Передается в 1->2
Метод Гаусса 2

Стартовое число ППСЧ 1200 Точность eps 1e-018
Интерполяция
 Линейная
 Сплаины 3 (вывод 2D-графика)

Ось абсцисс
min 0 max делим на 5 частей

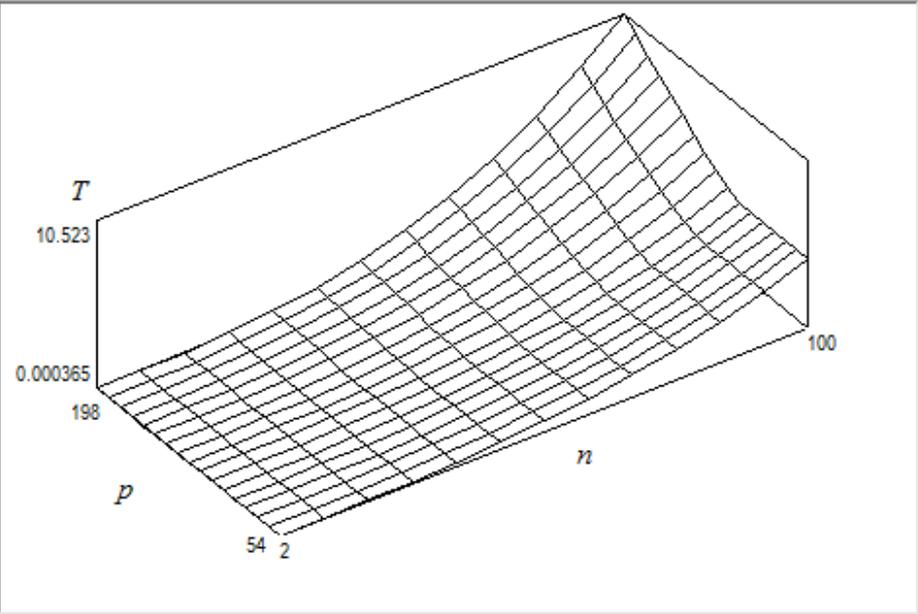
Ось ординат
min 0 max делим на 5 частей

Загрузить 3D

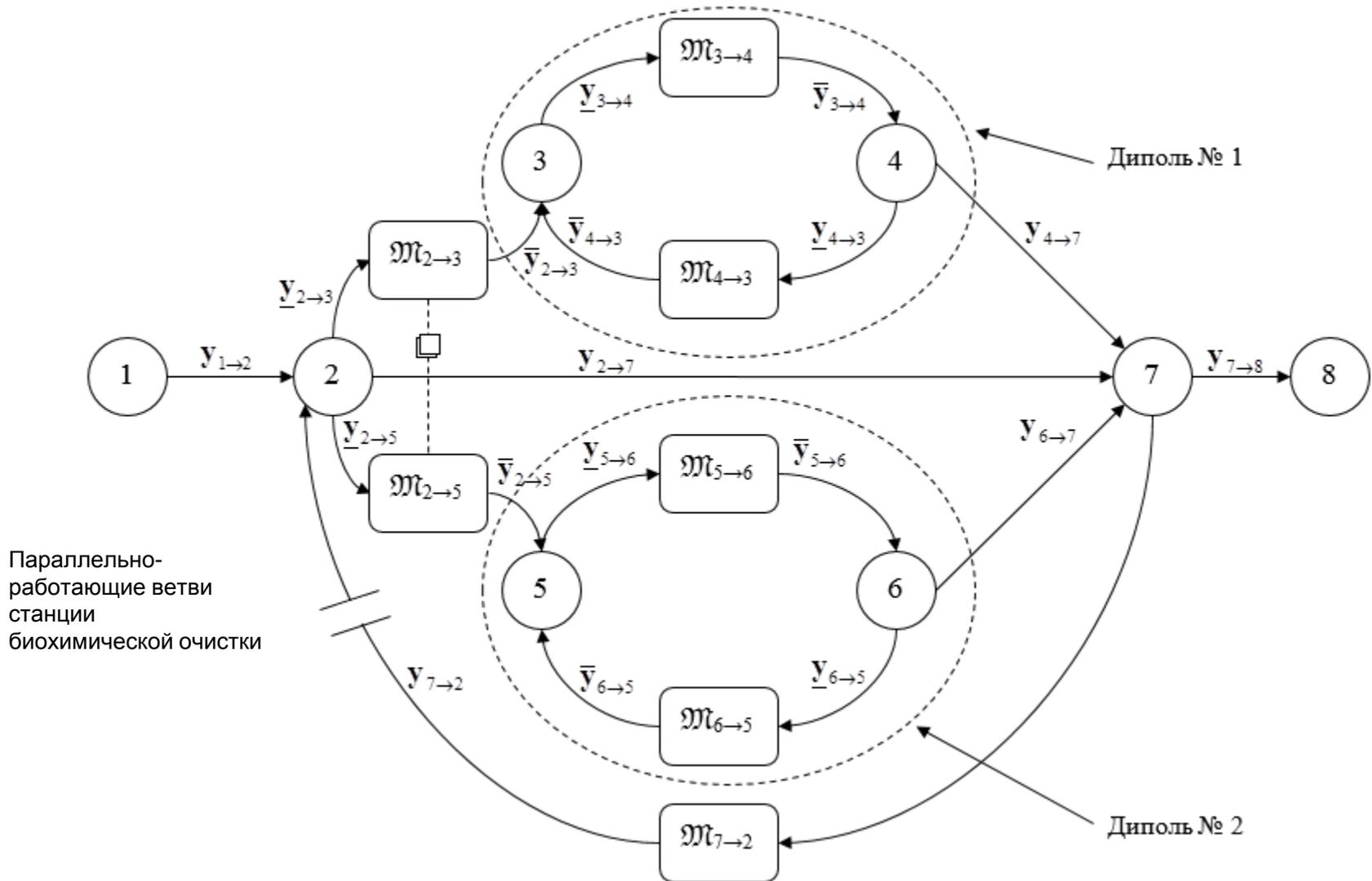
Начать вычисления Сохранить в EMF

Диапазон элементов СЛАУ -3 - 3 eps(p) (только HReal)

Завершено 0 %

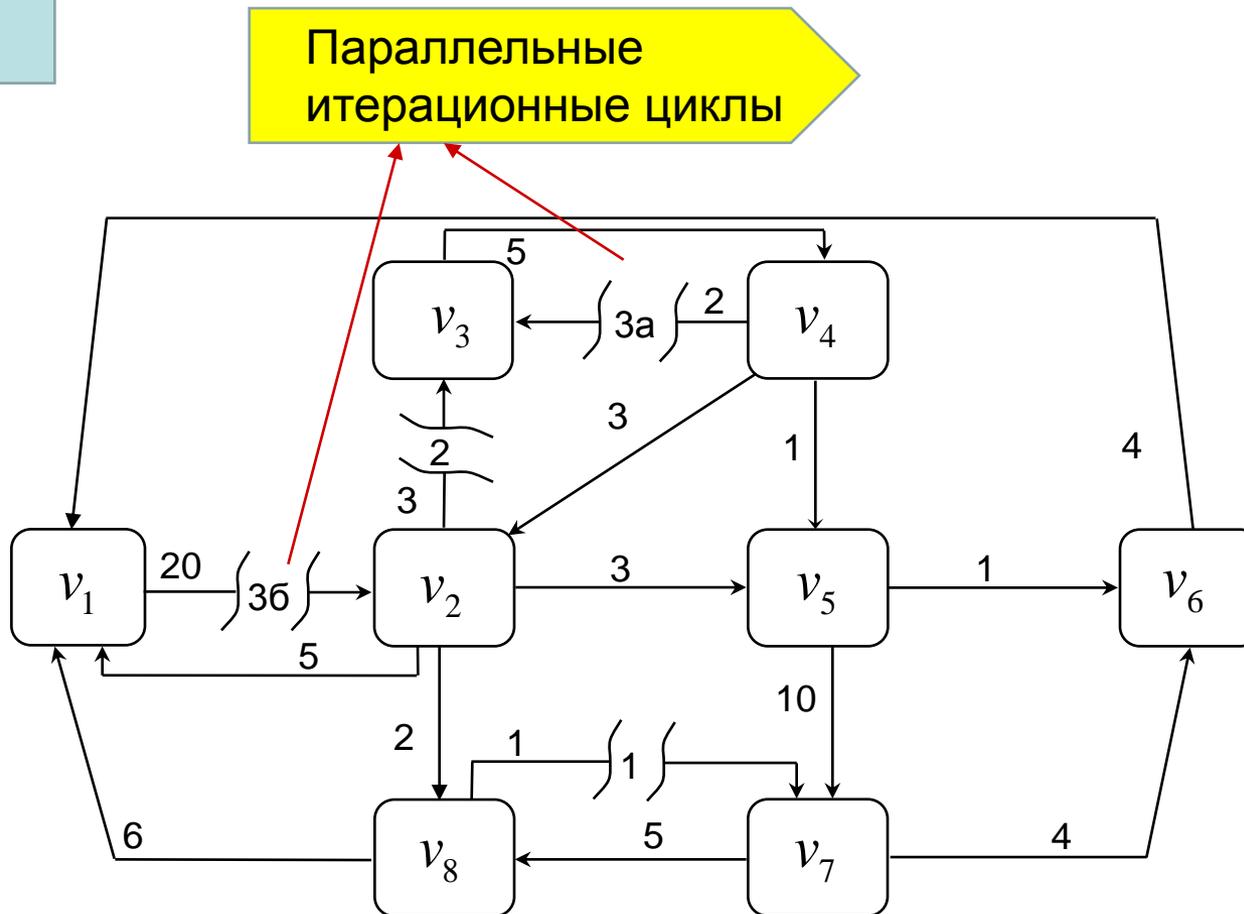


Фрагмент модели экологической системы: два параллельных диполя



1. Вход (рекурсивный адаптер): оргграф $G = (V, D, \Gamma)$.
2. Протокольная служба активирована? Нет – посылка сообщения на активизацию.
3. Оргграф сильно связный? $bic(G) = 1$? «Да» – на п. 12.
4. Структурная декомпозиция: разбиваем G на ССП $_i, i = 1..β$.
5. $\theta_0 = 0$.
6. Цикл по ССП, $i = 1..β$.
7. Вход (рекурсивный адаптер): оргграф $G = ССП_i$.
8. $\theta_0 = \theta_0 + \theta$.
9. Конец цикла по i .
10. $\theta = \theta_0$.
11. Выход: θ .
12. С точностью до изоморфизма оргграф G имеется в базе знаний оценок сложности (база знаний индексирована по инвариантам сильно связных оргграфов)? «Да» – обращаемся с запросом в базу знаний и получаем оценку $\theta \equiv \theta(G)$, выходим из рекурсивного адаптера со значением θ .
13. Проводим СПМ оргграфа $G = StrMin(G)$.
14. Построение контуриона на основе $\bar{C}(G)$ и Γ .
15. $\theta_0 = HUGE_VAL$ (наибольшее из всех возможных вещественных чисел в языке C++).
16. Цикл по дугам контуриона, $i = 1..m$.
17. Разрыв дуги $G' = G \setminus \{d_i\}$.
18. Декомпозиция G' на контурные подсистемы.
19. Цикл по списку контурных подсистем с суммированием результатов оценки сложности. Полагаем, что очередная КССП имеет обобщенный алиас G' .
20. Вход (рекурсивный адаптер): $G =$ оргграф G'
21. Уточняем мультипликативную оценку сложности $\theta = \gamma_i(1 + \theta)$.
22. $\theta < \theta_0$? Оценка убывает? «НЕТ» - выходим из цикла по i .
23. Запоминаем оценку $\theta_0 = \theta$.
24. Конец цикла, открытого в п. 19.
25. Конец цикла по i .
26. Выход со значением $\theta = \theta_0$.

Пример



ВЫВОДЫ

Разработан теоретический базис оценки сложности крупноблочных облачных вычислений, использующих арифметику повышенной точности, включающий в себя методы и алгоритмы, предназначенные для проектирования ОВС. В настоящее время работа ведется в направлении дальнейшей конкретизации оценок сложности реальных вычислительных диполей, проводятся вычислительные эксперименты по использованию арифметики повышенной точности в типовых численных методах с дальнейшей аппроксимацией полученных результатов тестирования. Планируется получить конкретные выражения для функционалов параметричности дуг орграфа ОВС при решении крупноблочных задач математического моделирования.