



**Пузикова Валерия Валентиновна**

**РАЗРАБОТКА МОДИФИКАЦИИ  
МЕТОДА ПОГРУЖЕННЫХ ГРАНИЦ LS-STAG  
ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
В СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧАХ ГИДРОУПРУГОСТИ**

***Конференция «Облачные вычисления.  
Образование. Исследования. Разработка» 2015***

**Семинар «Свободное ПО для решения задач  
механики сплошных сред» 2015**

Москва — 2015

- 0 Введение
- 1 Метод LS-STAG для моделирования течений вязкой несжимаемой среды
- 2 Модификация метода LS-STAG для решения сопряженных задач гидроупругости
- 3 Модификация метода LS-STAG для расчета течений вязкой несжимаемой среды в рамках различных подходов к моделированию турбулентности
- 4 Программная реализация разработанных модификаций метода LS-STAG
- 5 Основные результаты и выводы

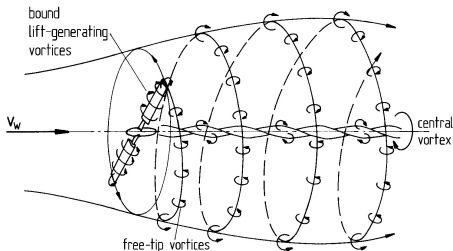


Рис. 1. Ветроэнергетические установки



Рис. 2. Линии электропередачи

Тело + жидкость = единая система



В случае достаточно тяжелого тела:

- 1 моделирование обтекания тела, движущегося с заданными параметрами;
- 2 расчет динамики тела при известных гидродинамических нагрузках.

# Выбор численного метода

Гидроупругое движение + тело сложной формы

Методы с сеткой, связанной с телом.

Методы погруженных границ.

Методы погруженных границ

Рис. 3. Расчетная область:

$\Omega = \Omega_f \cup \Omega_{ib}$

Твердые ячейки  $\Rightarrow$  Нет дискретизации

Жидкие ячейки  $\Rightarrow$  Обычная дискретизация

Усеченные ячейки  $\Rightarrow$   
Специальная дискретизация

Метод LS-STAG (Botella O. & Cheny Y., 2010)

- прямоугольные разнесенные сетки;
- пятиточечный шаблон (в 2D);
- сетка не связана с телом;
- расчет течений с подвижными границами на неподвижной сетке;
- единообразная дискретизация в прямоугольных и усеченных ячейках;
- на усеченных ячейках происходит не интерполяция и снос, а аппроксимация уравнений и граничных условий.

При высоких значениях числа Рейнольдса

- Сильное измельчение шагов по времени и по пространству.
- $\Rightarrow$  Необходимо разработать модификацию метода LS-STAG для проведения расчетов с использованием моделей турбулентности.

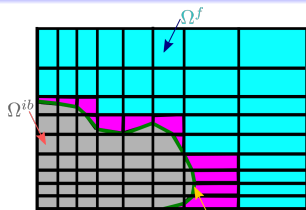
# Выбор численного метода

Гидроупругое движение + тело сложной формы

Методы с сеткой, связанной с телом.

Методы погруженных границ.

Методы погруженных границ



Погруженная граница  $\Gamma^{ib}$

Рис. 3. Расчетная область:

$$\Omega = \Omega^f \cup \Omega^{ib}$$

Твердые ячейки  $\Rightarrow$  Нет дискретизации

Жидкие ячейки  $\Rightarrow$  Обычная дискретизация

Усеченные ячейки  $\Rightarrow$

Специальная дискретизация

Метод LS-STAG (Botella O. & Chen Y., 2010)

- прямоугольные разнесенные сетки;
- пятиточечный шаблон (в 2D);
- сетка не связана с телом;
- расчет течений с подвижными границами на неподвижной сетке;
- единообразная дискретизация в прямоугольных и усеченных ячейках;
- на усеченных ячейках происходит не интерполяция и снос, а аппроксимация уравнений и граничных условий.

При высоких значениях числа Рейнольдса

- Сильное измельчение шагов по времени и по пространству.
- $\Rightarrow$  Необходимо разработать модификацию метода LS-STAG для проведения расчетов с использованием моделей турбулентности.

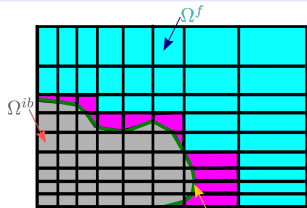
# Выбор численного метода

Гидроупругое движение + тело сложной формы

Методы с сеткой, связанной с телом.

Методы погруженных границ.

## Методы погруженных границ



Погруженная граница  $\Gamma^{ib}$

Рис. 3. Расчетная область:

$$\Omega = \Omega^f \cup \Omega^{ib}$$

Твердые ячейки  $\Rightarrow$  Нет дискретизации

Жидкие ячейки  $\Rightarrow$  Обычная дискретизация

Усеченные ячейки  $\Rightarrow$

Специальная дискретизация

## Метод LS-STAG (Botella O. & Cheny Y., 2010):

- прямоугольные разнесенные сетки;
- пятиточечный шаблон (в 2D);
- сетка не связана с телом;
- расчет течений с подвижными границами на неподвижной сетке;
- единообразная дискретизация в прямоугольных и усеченных ячейках;
- на усеченных ячейках происходит не интерполяция и снос, а аппроксимация уравнений и граничных условий.

## При высоких значениях числа Рейнольдса

- Сильное измельчение шагов по времени и по пространству.
- $\Rightarrow$  Необходимо разработать модификацию метода LS-STAG для проведения расчетов с использованием моделей турбулентности.

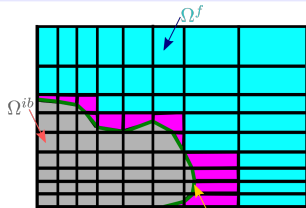
# Выбор численного метода

Гидроупругое движение + тело сложной формы

Методы с сеткой, связанной с телом.

Методы погруженных границ.

## Методы погруженных границ



Погруженная граница  $\Gamma^{ib}$

Рис. 3. Расчетная область:

$$\Omega = \Omega^f \cup \Omega^{ib}$$

Твердые ячейки  $\Rightarrow$  Нет дискретизации

Жидкие ячейки  $\Rightarrow$  Обычная дискретизация

Усеченные ячейки  $\Rightarrow$

Специальная дискретизация

## Метод LS-STAG (Botella O. & Cheny Y., 2010):

- прямоугольные разнесенные сетки;
- пятиточечный шаблон (в 2D);
- сетка не связана с телом;
- расчет течений с подвижными границами на неподвижной сетке;
- единообразная дискретизация в прямоугольных и усеченных ячейках;
- на усеченных ячейках происходит не интерполяция и снос, а аппроксимация уравнений и граничных условий.

## При высоких значениях числа Рейнольдса

- Сильное измельчение шагов по времени и по пространству.
- $\Rightarrow$  Необходимо разработать модификацию метода LS-STAG для проведения расчетов с использованием моделей турбулентности.

# Цель и задачи исследования

**Цель работы** — разработка математических моделей, вычислительных алгоритмов и программная реализация метода LS-STAG и его модификаций для численного решения сопряженных задач гидроупругости на различных вычислительных комплексах.

Потребовалось решение следующих задач.

- 1 Программная реализация метода LS-STAG с применением эффективных численных методов решения линейных систем, возникающих при дискретизации уравнений гидродинамики.
- 2 Программная реализация модификации метода LS-STAG для расчета течений с подвижными погруженными границами.
- 3 Верификация программного комплекса.
- 4 Адаптация RANS, LES и DES уравнений гидродинамики и известных моделей турбулентности (Смагоринского, Спаларта — Аллмараса,  $k - \epsilon$ ,  $k - \omega$ ,  $k - \omega$  SST) к их использованию в LS-STAG-методе.
- 5 Программная реализация перечисленных моделей, их верификация, решение тестовых задач по расчету течений, характеризующихся высокими числами Рейнольдса.
- 6 Разработка переносимой параллельной реализации созданных модификаций LS-STAG-метода, адаптированной к проведению расчетов на современных вычислительных комплексах с общей памятью.



# Цель и задачи исследования

Цель работы — разработка математических моделей, вычислительных алгоритмов и программная реализация метода LS-STAG и его модификаций для численного решения сопряженных задач гидроупругости на различных вычислительных комплексах.

Потребовалось решение следующих задач.

- 1 Программная реализация метода LS-STAG с применением эффективных численных методов решения линейных систем, возникающих при дискретизации уравнений гидродинамики.
- 2 Программная реализация модификации метода LS-STAG для расчета течений с подвижными погруженными границами.
- 3 Верификация программного комплекса.
- 4 Адаптация RANS, LES и DES уравнений гидродинамики и известных моделей турбулентности (Смагоринского, Спаларта — Аллмараса,  $k - \varepsilon$ ,  $k - \omega$ ,  $k - \omega$  SST) к их использованию в LS-STAG-методе.
- 5 Программная реализация перечисленных моделей, их верификация, решение тестовых задач по расчету течений, характеризующихся высокими числами Рейнольдса.
- 6 Разработка переносимой параллельной реализации созданных модификаций LS-STAG-метода, адаптированной к проведению расчетов на современных вычислительных комплексах с общей памятью.

- 0 Введение
- 1 Метод LS-STAG для моделирования течений вязкой несжимаемой среды**
- 2 Модификация метода LS-STAG для решения сопряженных задач гидроупругости
- 3 Модификация метода LS-STAG для расчета течений вязкой несжимаемой среды в рамках различных подходов к моделированию турбулентности
- 4 Программная реализация разработанных модификаций метода LS-STAG
- 5 Основные результаты и выводы

# Постановка задачи

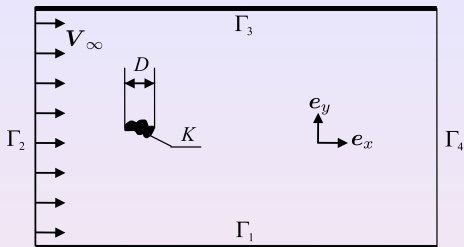


Рис. 4. Расчетная область

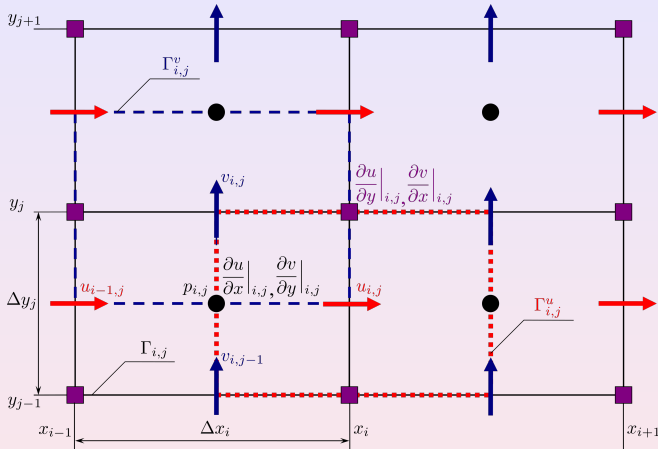
Математическая модель

в безразмерной форме:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v} = \vec{0}, \\ \vec{v}(x, y, 0) = \vec{v}_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ \vec{v}|_K = \vec{v}^{ib} = \vec{v}^{ib}(x, y, t), \\ \vec{v}|_{\Gamma \setminus \Gamma_4} = \vec{V}_\infty, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma_4} = \vec{0}, \quad \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma \cup K} = 0. \end{cases}$$

- $\vec{V}_\infty = \text{const}$ ,  $p_\infty = \text{const}$ ;
- вязкая несжимаемая среда,  $\rho = \text{const}$ ;
- жесткий профиль произвольной формы (или их система);
- $\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$  — радиус-вектор точки  $(x; y)$ ;
- $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) = u \cdot \vec{e}_x + v \cdot \vec{e}_y$  — безразмерная скорость;
- в данной главе рассматриваются задачи, в которых форма расчетной области не изменяется (погруженные границы не перемещаются в пространстве), при этом  $\vec{v}^{ib}$  может быть  $\neq 0$  (например, течение в каверне, вращательные колебания кругового профиля).

# LS-STAG-сетка (2D)

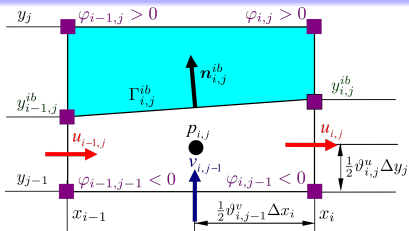


- Прямоугольные разнесенные сетки: контрольные объемы (КО)  $\Omega_{i,j}$ ,  $\Omega_{i,j}^u$ ,  $\Omega_{i,j}^v$ .
- Положение границы  $\Gamma^{ib}$  определяется функцией уровня  $\varphi(\vec{r})$ .
- $u$  и  $v$  вычисляются в центрах жидких частей граней ячеек  $\Omega_{i,j}$ .
- $p$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial v}{\partial y}$  вычисляются в центрах ячеек  $\Omega_{i,j}$ .
- $\varphi$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  и  $\frac{\partial v}{\partial x}$  вычисляются в углах ячеек  $\Omega_{i,j}$ .

КО	Граница	Площадь «жидкой» части КО	Уравнение
$\Omega_{i,j}$	$\Gamma_{i,j}$	$V_{i,j}$	неразрывности
$\Omega_{i,j}^u / \Omega_{i,j}^v$	$\Gamma_{i,j}^u / \Gamma_{i,j}^v$	$\mathcal{M}_{i,j}^x / \mathcal{M}_{i,j}^y$	импульса ( $O_x / O_y$ )

# Усеченные ячейки (2D)

Тип усеченной ячейки определяется коэффициентами заполнения



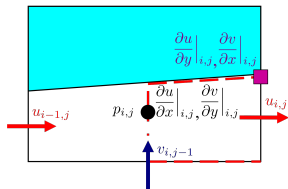
$$\vartheta_{i,j}^u = \frac{\min(\varphi_{i,j-1}, \varphi_{i,j})}{\min(\varphi_{i,j-1}, \varphi_{i,j}) - \max(\varphi_{i,j-1}, \varphi_{i,j})},$$

$$\vartheta_{i,j}^v = \frac{\min(\varphi_{i-1,j}, \varphi_{i,j})}{\min(\varphi_{i-1,j}, \varphi_{i,j}) - \max(\varphi_{i-1,j}, \varphi_{i,j})}.$$

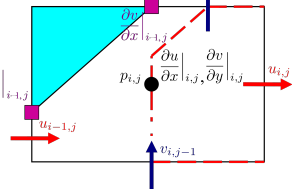
$\vartheta_{i,j}^u, \vartheta_{i,j}^v \in [0, 1]$  показывают, какая часть ячейки занята жидкостью на восточной и северной границах ячейки соответственно.

Три типа усеченных ячеек в 2D

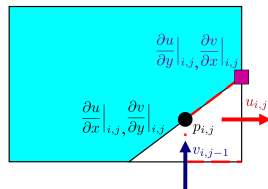
Трапецевидная ячейка



Треугольная ячейка



Пятиугольная ячейка



# Расчет сил, действующих на погруженную границу

## Сила лобового сопротивления

$$F_{xa} = \sum_{\text{Cut-cells } \Omega_{i,j}} \left[ \underbrace{(\vartheta_{i-1,j}^u - \vartheta_{i,j}^u) \Delta y_j}_{[n_x \Delta S]_{i,j}^{ib}} \left( p_{i,j} - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \right) - \nu \text{Quad}_{i,j}^{ib} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_y \cdot \vec{n} \right) \right].$$

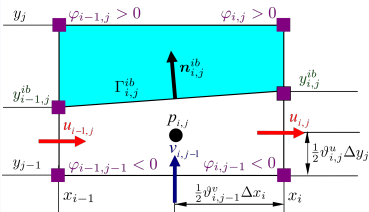
## Подъемная сила

$$F_{ya} = \sum_{\text{Cut-cells } \Omega_{i,j}} \left[ -\nu \text{Quad}_{i,j}^{ib} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_x \cdot \vec{n} \right) + \underbrace{(\vartheta_{i,j-1}^v - \vartheta_{i,j}^v) \Delta x_i}_{=[n_y \Delta S]_{i,j}^{ib}} \left( p_{i,j} - \nu \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j} \right) \right].$$

- $\sum_{\text{Cut-cells } \Omega_{i,j}^{ib}}$  — суммирование по всем усеченным ячейкам;
- $\text{Quad}_{i,j}^{ib} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_y \cdot \vec{n} \right) \approx \int_{\Gamma_{i,j}^{ib}} \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_y \cdot \vec{n} dS$ ,  $\text{Quad}_{i,j}^{ib} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_x \cdot \vec{n} \right) \approx \int_{\Gamma_{i,j}^{ib}} \frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_x \cdot \vec{n} dS$  — зависят от типа  $\Omega_{i,j}$ ;
- $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \approx \frac{\vartheta_{i,j}^u u_{i,j} - \vartheta_{i-1,j}^u u_{i-1,j} + (\vartheta_{i-1,j}^u - \vartheta_{i,j}^u) u_{i,j}^{ib}}{V_{i,j} / \Delta y_j}$ ,  
 $\frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j} \approx \frac{\vartheta_{i,j}^v v_{i,j} - \vartheta_{i,j-1}^v v_{i,j-1} + (\vartheta_{i,j-1}^v - \vartheta_{i,j}^v) v_{i,j}^{ib}}{V_{i,j} / \Delta x_i}$ ,  $\vec{v}_{i,j}^{ib} = \frac{1}{2} \vec{v}(x_i, y_{i,j}^{ib}) + \frac{1}{2} \vec{v}(x_{i-1}, y_{i-1,j}^{ib})$ .

# LS-STAG-дискретизация (Botella O. & Cheny Y., 2010)

Уравнение неразрывности (для всех типов ячеек)



$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \int \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0.$$

$$\Gamma_{i,j} = \Gamma_{i,j}^w \cup \Gamma_{i,j}^e \cup \Gamma_{i,j}^s \cup \Gamma_{i,j}^n$$

$$\bar{u}_{i-1,j} - \bar{u}_{i,j} + \bar{v}_{i,j-1} - \bar{v}_{i,j} - \bar{U}_{i,j}^{ib} = 0,$$

$$\bar{u}_{i,j} = \int_{y_{j-1}}^{y_{j}^{ib}} u(x_i, y) dy \approx \vartheta_{i,j}^u \Delta y_j u_{i,j}, \quad \bar{v}_{i,j} \approx \vartheta_{i,j}^v \Delta x_i v_{i,j},$$

$$\bar{U}_{i,j}^{ib} = \int_{\Gamma_{i,j}^{ib}} \vec{v}_{i,j}^{ib} \cdot \vec{n}_{i,j}^{ib} dS \approx u_{i,j}^{ib} [n_x \Delta S]_{i,j}^{ib} + v_{i,j}^{ib} [n_y \Delta S]_{i,j}^{ib}.$$

$$\Rightarrow \text{В матричной форме: } \mathcal{D}^x U_x + \mathcal{D}^y U_y + \bar{U}^{ib} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}U + \bar{U}^{ib} = 0.$$

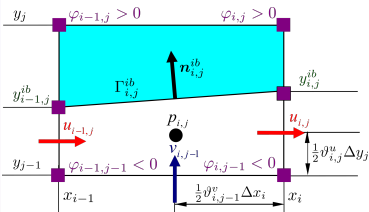
Уравнения Навье — Стокса

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{i,j}^u} u dV + \int_{\Gamma_{i,j}^u} (\vec{v} \cdot \vec{n}) u dS + \int p \vec{e}_x \cdot \vec{n} dS - \int \nu \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x \cdot \vec{n} dS - \int \nu \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_y \cdot \vec{n} dS = 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{i,j}^v} v dV + \int_{\Gamma_{i,j}^v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) v dS + \int p \vec{e}_y \cdot \vec{n} dS - \int \nu \frac{\partial v}{\partial y} \vec{e}_y \cdot \vec{n} dS - \int \nu \frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_x \cdot \vec{n} dS = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^x U_x) + e^x U_x + S_x^{ib,c} + \mathcal{G}^x P - \nu \mathcal{K}^x U_x - \nu S_x^{ib,\nu} = 0, \\ \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^y U_y) + e^y U_y + S_y^{ib,c} + \mathcal{G}^y P - \nu \mathcal{K}^y U_y - \nu S_y^{ib,\nu} = 0. \end{cases}$$

# LS-STAG-дискретизация (Botella O. & Cheny Y., 2010)

Уравнение неразрывности (для всех типов ячеек)



$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \int \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0.$$

$$\Gamma_{i,j} = \Gamma_{i,j}^w \cup \Gamma_{i,j}^e \cup \Gamma_{i,j}^s \cup \Gamma_{i,j}^n \cup \Gamma_{i,j}^{ib}$$

$$\bar{u}_{i-1,j} - \bar{u}_{i,j} + \bar{v}_{i,j-1} - \bar{v}_{i,j} - \bar{U}_{i,j}^{ib} = 0,$$

$$\bar{u}_{i,j} = \int_{y_{j-1}}^{y_j^{ib}} u(x_i, y) dy \approx \vartheta_{i,j}^u \Delta y_j u_{i,j}, \quad \bar{v}_{i,j} \approx \vartheta_{i,j}^v \Delta x_i v_{i,j},$$

$$\bar{U}_{i,j}^{ib} = \int_{\Gamma_{i,j}^{ib}} \vec{v}_{i,j} \cdot \vec{n}_{i,j}^{ib} dS \approx u_{i,j}^{ib} [n_x \Delta S]_{i,j}^{ib} + v_{i,j}^{ib} [n_y \Delta S]_{i,j}^{ib}.$$

$$\Rightarrow \text{В матричной форме: } \mathcal{D}^x U_x + \mathcal{D}^y U_y + \bar{U}^{ib} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}U + \bar{U}^{ib} = 0.$$

Уравнения Навье — Стокса

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int \rho u dV + \int (\vec{v} \cdot \vec{n}) \rho u dS + \int \rho \vec{e}_x \cdot \vec{n} dS - \int \nu \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x \cdot \vec{n} dS - \int \nu \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_y \cdot \vec{n} dS = 0, \\ \frac{d}{dt} \int \rho v dV + \int (\vec{v} \cdot \vec{n}) \rho v dS + \int \rho \vec{e}_y \cdot \vec{n} dS - \int \nu \frac{\partial v}{\partial y} \vec{e}_y \cdot \vec{n} dS - \int \nu \frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_x \cdot \vec{n} dS = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^x U_x) + \mathcal{C}^x U_x + S_x^{ib,c} + \mathcal{G}^x P - \nu \mathcal{K}^x U_x - \nu S_x^{ib,\nu} = 0, \\ \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^y U_y) + \mathcal{C}^y U_y + S_y^{ib,c} + \mathcal{G}^y P - \nu \mathcal{K}^y U_y - \nu S_y^{ib,\nu} = 0. \end{cases}$$



# Интегрирование по времени

Используется полунявный метод, основанный на схеме типа Адамса — Башфорта второго порядка с дифференцированием назад AB/BDF 2

- 1 Шаг предиктора приводит к решению разностного аналога уравнения

Гельмгольца для прогноза скорости  $\tilde{U}_x, \tilde{U}_y$  в момент времени  $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ :

$$\frac{\mathcal{M}^x(3\tilde{U}_x - 4U_x^n + U_x^{n-1})}{2\Delta t} + 2(c^x[\bar{U}^n]U^n + S_x^{ib,c,n}) - c^x[\bar{U}^{n-1}]U^{n-1} - S_x^{ib,c,n-1} + g^x P^{n-\nu} \mathcal{K}^x \tilde{U}_x - \nu S_x^{ib,\nu} = 0,$$
$$\frac{\mathcal{M}^y(3\tilde{U}_y - 4U_y^n + U_y^{n-1})}{2\Delta t} + 2(c^y[\bar{U}^n]U^n + S_y^{ib,c,n}) - c^y[\bar{U}^{n-1}]U^{n-1} - S_y^{ib,c,n-1} + g^y P^{n-\nu} \mathcal{K}^y \tilde{U}_y - \nu S_y^{ib,\nu} = 0.$$

- 2 Шаг корректора приводит к решению разностного аналога уравнения

Пуассона для  $\Phi = \frac{2\Delta t(P^{n+1} - P^n)}{3}$ :

$$A\Phi = \mathcal{D}^x \tilde{U}_x + \mathcal{D}^y \tilde{U}_y + \bar{U}^{ib,n+1}, \quad A = \mathcal{D}^x (\mathcal{M}^x)^{-1} g^x + \mathcal{D}^y (\mathcal{M}^y)^{-1} g^y.$$

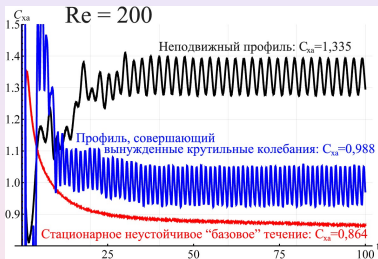
☞ Системы линейных алгебраических уравнений решаются при помощи метода BiCGStab (van der Vorst, 1992) с ILU- и многосеточным предобуславливанием.

Затем определяются скорости и давление в момент времени  $t_{n+1}$ :

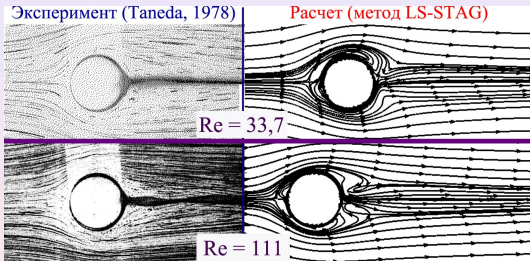
$$U_x^{n+1} = \tilde{U}_x - (\mathcal{M}^x)^{-1} g^x \Phi, \quad U_y^{n+1} = \tilde{U}_y - (\mathcal{M}^y)^{-1} g^y \Phi, \quad P^{n+1} = \frac{3\Phi}{2\Delta t} + P^n.$$

# Обтекание кругового профиля, совершающего вращательные колебания

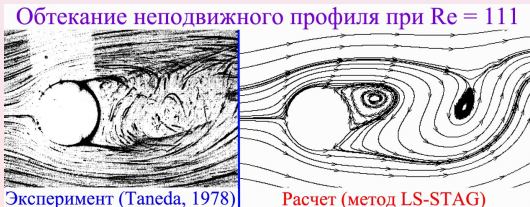
- Низкочастотные колебания: снижение лобового сопротивления



- Высокочастотные колебания: стабилизация следа за профилем (эффект Танеды)



Марчевский И.К.,  
Пузикова В.В. Моделирование обтекания кругового профиля, совершающего вращательные колебания, методом LS-STAG // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2014. № 3. С. 93–107.



- 0 Введение
- 1 Метод LS-STAG для моделирования течений вязкой несжимаемой среды
- 2 Модификация метода LS-STAG для решения сопряженных задач гидроупругости**
- 3 Модификация метода LS-STAG для расчета течений вязкой несжимаемой среды в рамках различных подходов к моделированию турбулентности
- 4 Программная реализация разработанных модификаций метода LS-STAG
- 5 Основные результаты и выводы

# Постановка задачи

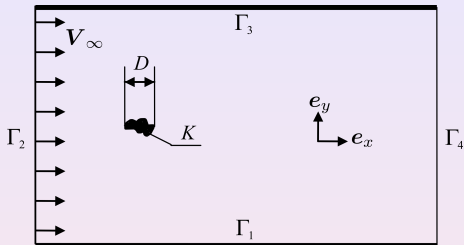


Рис. 5. Расчетная область

## Математическая модель

в безразмерной форме:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v} = \vec{0}, \\ \vec{v}(x, y, 0) = \vec{v}_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ \vec{v}|_K = \vec{v}^{\text{ib}} = \vec{v}^{\text{ib}}(x, y, t), \\ \vec{v}|_{\Gamma \setminus \Gamma_4} = \vec{V}_\infty, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma_4} = \vec{0}, \quad \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma_{\text{UK}}} = 0. \end{cases}$$

## Уравнения движения профиля

$$\ddot{\vec{q}} = \vec{\Phi}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + \vec{Q}^{\text{flow}} + \vec{Q}^{\text{ext}},$$

- $\vec{V}_\infty = \text{const}$ ,  $p_\infty = \text{const}$ ,  $\rho = \text{const}$ ;
- вязкая несжимаемая среда;
- жесткий профиль произвольной формы (или их система);
- колебания с 1, 2, 3 степенями свободы.

- $\vec{q}$  — обобщенные координаты;
- $\vec{\Phi}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$  — обобщенные реакции связей;
- $\vec{Q}^{\text{flow}}$  — обобщенная гидродинамическая сила;
- $\vec{Q}^{\text{ext}}$  — внешние массовые силы.

# Учет движения погруженных границ

✓ Используется идея метода ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian — лагранжево-эйлеровы сетки):

- вблизи  $\Gamma^{ib}$  сетка следует за  $\Gamma^{ib}$  (лагранжево описание);
- на достаточном удалении от  $\Gamma^{ib}$  сетка неподвижна (эйлерово описание);
- должен выполняться численный аналог геометрического закона

сохранения<sup>1</sup>: 
$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} dV = \int_{\Gamma(t)} \vec{v}^g \cdot \vec{n} dS,$$

где  $\vec{v}^g$  — скорость движения узлов сетки;

- ALE-формулировка конвективных потоков: 
$$\int_{\Gamma(t)} ([\vec{v} - \vec{v}^g] \cdot \vec{n}) \vec{v} dS.$$

✓ Сетка не деформируется.

✓ Двигутся только узлы сетки на твердых границах  $\Gamma^{ib}(t)$  усеченных ячеек.



Выполнение геометрического закона сохранения упрощается.

---

<sup>1</sup>Farhat C., Geuzaine P., Grandmonty C. The discrete geometric conservation law and the nonlinear stability of ALE schemes for the solution of flow problems on moving grids // J. Comput. Phys. 2001. № 174. P. 669–694

# LS-STAG-дискретизация ALE-конвективных потоков

- Представляются в виде суммы потоков через грани КО.

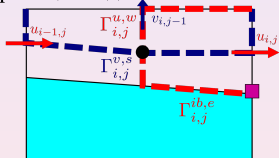
- Используется центральная интерполяция:

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u,w}} (\vec{v} \cdot \vec{e}_x) u \, dy \approx \frac{1}{2} (\bar{u}_{i-1,j} + \bar{u}_{i,j}) \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j}}{2}, \quad \int_{\Gamma_{i,j}^{v,s}} (\vec{v} \cdot \vec{e}_y) v \, dx \approx \frac{1}{2} (\bar{v}_{i,j-1} + \bar{v}_{i,j}) \frac{v_{i,j-1} + v_{i,j}}{2}.$$

- На  $\Gamma^{ib}$  зависит от типов половинок ячеек в КО, например:

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{ib,e}} ([\vec{v} - \vec{v}^g] \cdot \vec{n}_{i,j}^{ib}) u \, dS \approx \bar{v}_{ib} \cdot \frac{u(x_i, y_{i,j}^{ib}) + u_{i,j}}{2}, \quad \int_{\Gamma_{i,j}^{ib,n}} ([\vec{v} - \vec{v}^g] \cdot \vec{n}_{i,j}^{ib}) v \, dS \approx \bar{u}_{ib} \cdot \frac{v(x_{i,j}^{ib}, y_j) + v_{i,j}}{2}.$$

Трапецевидная ячейка

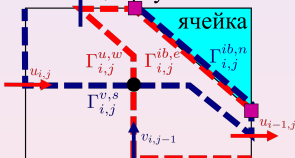


$$\bar{v}_{ib} = \frac{1}{2} (\bar{U}_{i,j}^{ib} - \bar{U}_{i,j}^g)$$

$$\bar{u}_{ib} = 0$$

$$(!) \int_{\Gamma_{i,j}^{v,s}} (\vec{v} \cdot \vec{e}_y) v \, dx \approx (\bar{v}_{ib} - \frac{\bar{v}_{i,j}}{2}) \frac{v_{i,j} + v_{i,j}^{ib}}{2}$$

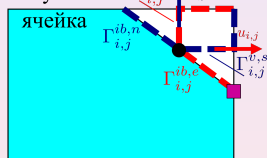
Треугольная ячейка



$$\frac{1}{2} (\bar{U}_{i,j}^{ib} - \bar{U}_{i,j}^g + \bar{v}_{i,j})$$

$$\frac{1}{2} (\bar{U}_{i,j}^{ib} - \bar{U}_{i,j}^g + \bar{u}_{i,j})$$

Пятиугольная ячейка



$$\frac{1}{2} (v_{i,j}^{ib} [n_y \Delta S]_{i,j}^{ib} - \bar{U}_{i,j}^g)$$

$$\frac{1}{2} (u_{i,j}^{ib} [n_x \Delta S]_{i,j}^{ib} - \bar{U}_{i,j}^g)$$

$$(!) \int_{\Gamma_{i,j}^{v,s}} (\vec{v} \cdot \vec{e}_x) u \, dy \approx (\bar{u}_{ib} - \frac{\bar{u}_{i,j}}{2}) \frac{u_{i,j} + u_{i,j}^{ib}}{2}$$

$$(!) \int_{\Gamma_{i,j}^{v,s}} (\vec{v} \cdot \vec{e}_y) v \, dx \approx (\bar{v}_{ib} - \frac{\bar{v}_{i,j}}{2}) \frac{v_{i,j} + v_{i,j}^{ib}}{2}$$

# Интегрирование по времени

Используется схема предиктор-корректор первого порядка точности

- 1 Шаг предиктора приводит к решению разностного аналога уравнения

Гельмгольца для прогноза скорости  $\tilde{U}_x$ ,  $\tilde{U}_y$  в момент времени  $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ :

$$\frac{\mathcal{M}^{x,n+1}\tilde{U}_x - \mathcal{M}^{x,n}U_x^n}{\Delta t} + \mathcal{C}^x[\bar{U}^n - \bar{U}^{g,n}]U^n + S_x^{ib,c,n} + \mathcal{G}^{x,n}P^n - \nu\mathcal{K}^{x,n+1}\tilde{U}_x - \nu S_x^{ib,\nu,n+1} = 0,$$
$$\frac{\mathcal{M}^{y,n+1}\tilde{U}_y - \mathcal{M}^{y,n}U_y^n}{\Delta t} + \mathcal{C}^y[\bar{U}^n - \bar{U}^{g,n}]U^n + S_y^{ib,c,n} + \mathcal{G}^{y,n}P^n - \nu\mathcal{K}^{y,n+1}\tilde{U}_y - \nu S_y^{ib,\nu,n+1} = 0.$$

- $\mathcal{C} = -\mathcal{C}^T$ ,  $\mathcal{G} = -\mathcal{D}^T$ ,  $\bar{U}_{ij}^{g,n} = (V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n)/\Delta t$ ;
- $-\mathcal{K}^T + \mathcal{K}$  — положительно определенная матрица;

- 2 Шаг корректора приводит к решению разностного аналога уравнения

Пуассона для  $\hat{\Phi} = \Delta t(P^{n+1} - P^n)$ :

$$\mathcal{A}^{n+1}\hat{\Phi} = \mathcal{D}^{x,n+1}\tilde{U}_x + \mathcal{D}^{y,n+1}\tilde{U}_y + \bar{U}^{ib,n+1}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{D}^x(\mathcal{M}^x)^{-1}\mathcal{G}^x + \mathcal{D}^y(\mathcal{M}^y)^{-1}\mathcal{G}^y.$$

☞ Системы линейных алгебраических уравнений решаются при помощи метода BiCGStab (van der Vorst, 1992) с ILU- и многосеточным предобуславливанием.

Затем определяются скорости и давление в момент времени  $t_{n+1}$ :

$$U_x^{n+1} = \tilde{U}_x - (\mathcal{M}^{x,n+1})^{-1}\mathcal{G}^{x,n+1}\hat{\Phi}, \quad U_y^{n+1} = \tilde{U}_y - (\mathcal{M}^{y,n+1})^{-1}\mathcal{G}^{y,n+1}\hat{\Phi}, \quad P^{n+1} = P^n + (\hat{\Phi}/\Delta t).$$

# Ветровой резонанс кругового профиля

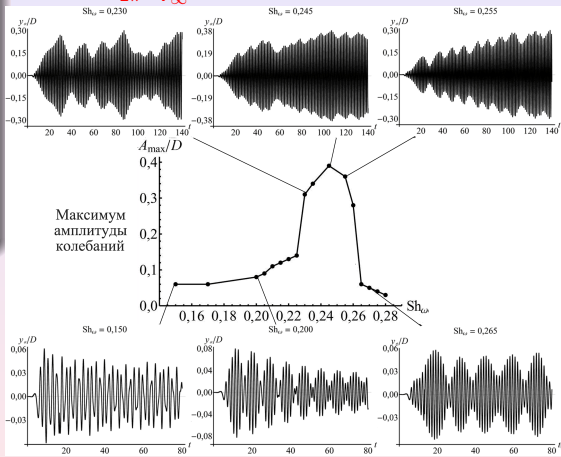
Уравнение движения профиля

$$m\ddot{y}_* + b\dot{y}_* + cy_* = F_{ya},$$

- $m$  — масса профиля;
- $b$  — коэффициент демпфирования;
- $c$  — жесткость связи;
- $F_{ya}$  — подъемная сила;
- $y_*$  — отклонение профиля от положения равновесия.

$$V_\infty = 3,0, D = 1,0, Re = 1000, m = 39,75, b = 0,731^a,$$

$$Sh_\omega = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{D}{V_\infty} = 0,150, \dots, 0,280, \omega \approx \sqrt{c/m}.$$



<sup>a</sup> Klamo J. T., Leonard A., Roshko A. On the maximum amplitude for a freely vibrating cylinder in cross flow // J. Fluid Struct. 2005. № 21. P. 429–434.

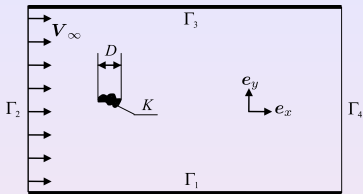
Сетка  $272 \times 292$ ,  $\Delta t = 10^{-4}$ .

Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.



- 0 Введение
- 1 Метод LS-STAG для моделирования течений вязкой несжимаемой среды
- 2 Модификация метода LS-STAG для решения сопряженных задач гидроупругости
- 3 Модификация метода LS-STAG для расчета течений вязкой несжимаемой среды в рамках различных подходов к моделированию турбулентности
- 4 Программная реализация разработанных модификаций метода LS-STAG
- 5 Основные результаты и выводы

# Постановка задачи



## Переход от RANS к LES и DES

Подход	Масштаб $l_{turb}$
RANS	$l_{RANS}$
LES	$l_{LES} = C_{LES} \Delta$
DES	$l_{DES} = \min\{l_{RANS}, C_{DES} \Delta\}$

- $\Delta = \Delta(\mathbf{r})$  — характерный размер фильтра;
- $C_{LES}$  и  $C_{DES}$  — эмпирические константы;
- $l_{RANS}$  определяется моделью турбулентности.

## RANS / LES / DES уравнения:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p - \frac{1}{Re} \Delta \vec{v} = \nabla \cdot \hat{\tau}^t, \\ \vec{v}(\vec{r}, 0) = \vec{v}_0(\vec{r}), \quad \vec{v}|_{\kappa} = \vec{v}^{ib} = \vec{v}^{ib}(\vec{r}, t), \\ \vec{v}|_{\Gamma \setminus \Gamma_4} = \vec{V}_{\infty}, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma_4} = \vec{0}, \quad \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma \cup \kappa} = 0, \end{cases}$$

- $p, \vec{v}$  — осредненные по Рейнольдсу / отфильтрованные давление и скорость;
- $\hat{\tau}^t$  — тензор рейнольдсовых / подсеточных напряжений.

## Гипотеза Буссинеска

$$\tau_{xx}^t = 2\nu^t \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}k, \quad \tau_{yy}^t = 2\nu^t \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{3}k, \quad \tau_{xy}^t = \nu^t \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

- $\nu^t$  — турбулентная вязкость;
- $k$  — кинетическая энергия турбулентности.

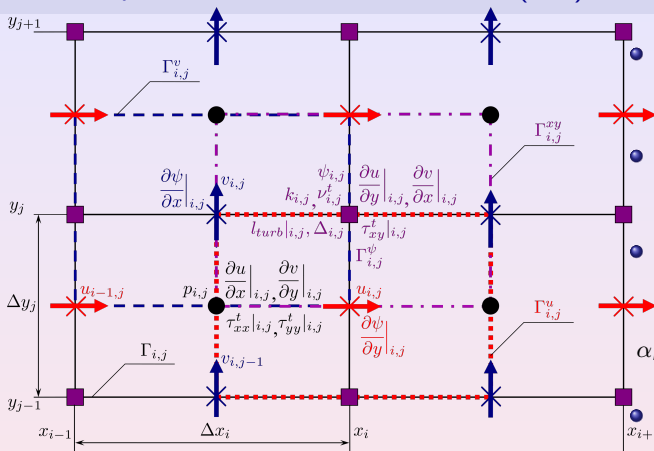
## Уравнения переноса из моделей турбулентности

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \psi = \text{Prod} - \text{Dis} + \nabla \cdot [(\nu + \Gamma^{\psi}) \nabla \psi] + \text{Add}, \\ \psi(\vec{r}, 0) = \psi_0(\vec{r}), \quad \psi|_{\kappa} = \psi^{ib}, \quad \psi|_{\Gamma \setminus \Gamma_4} = \psi_{\infty}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma_4} = 0, \end{cases}$$

- **Prod** — генерация  $\hat{\tau}^t$ ;
- **Dis** — диссипация  $\hat{\tau}^t$ ;
- **Add** — дополнительный член.

$\psi$	$\tilde{v}$	$k, \varepsilon$	$\omega$
$\Gamma^{\psi}$	$\tilde{\nu}$	$\nu^t / \sigma_{\psi}$	$\sigma_{\omega} \nu^t$

# Модификация LS-STAG-сетки (2D)



- $\tau_{xx}^t$  и  $\tau_{yy}^t$  вычисляются в центрах, а  $\tau_{xy}^t$ ,  $\nu^t$ ,  $k$ ,  $\psi$ ,  $\Gamma^{\psi}$ ,  $l_{turb}$  и  $\Delta$  — в углах  $\Omega_{i,j}$ .
- $\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}}{\vartheta_{i,j}^v \Delta x_i}$ ,  
 $\frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1}}{\vartheta_{i,j}^v \Delta y_j}$ .
- $\mathcal{M}_{i,j}^{xy} = \alpha_{i,j} V_{i,j} + \alpha_{i,j+1} V_{i,j+1} + \alpha_{i,j-1} V_{i,j-1} + \alpha_{i-1,j} V_{i-1,j}$ ,
- $\alpha_{i,j} = \begin{cases} 0, & \Omega_{i,j} \text{ — твердая,} \\ 1/3, & \Omega_{i,j} \text{ — треугольная,} \\ 1/4, & \text{в других случаях.} \end{cases}$
- $\Delta_{i,j} = \Delta_{i,j}^{vol} = (\mathcal{M}_{i,j}^{xy})^{1/2}$  или

$$\Delta_{i,j} = \Delta_{i,j}^{\max} = \max\{\Delta y_{i-1,j}^{xy}, \Delta y_{i,j}^{xy}, \Delta y_{i+1,j}^{xy}, \Delta x_{i,j-1}^{xy}, \Delta x_{i,j}^{xy}, \Delta x_{i,j+1}^{xy}\}, \text{ где}$$

$$\Delta y_{i,j}^{xy} = (\vartheta_{i,j}^u \Delta y_j + \vartheta_{i,j+1}^u \Delta y_{j+1})/2, \quad \Delta x_{i,j}^{xy} = (\vartheta_{i,j}^v \Delta x_i + \vartheta_{i+1,j}^v \Delta x_{i+1})/2.$$

## Гипотеза Буссинеска

$$\tau_{xy}^t \Big|_{i,j} = \nu_{i,j}^t \left( \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j} \right), \quad \tau_{xx}^t \Big|_{i,j} = 2\nu_{i,j}^t \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{2}{3} \bar{k}_{i,j}, \quad \tau_{yy}^t \Big|_{i,j} = 2\nu_{i,j}^t \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{2}{3} \bar{k}_{i,j},$$

$$\nu_{i,j}^t = \alpha_{i,j} (\nu_{i,j}^t + \nu_{i,j-1}^t + \nu_{i-1,j}^t + \nu_{i-1,j-1}^t), \quad \bar{k}_{i,j} = \alpha_{i,j} (k_{i,j} + k_{i,j-1} + k_{i-1,j} + k_{i-1,j-1}).$$

# Модификация метода LS-STAG для моделирования $\hat{\tau}^t$

Дополнительные слагаемые:

$$\begin{aligned} \bullet \int_{\Gamma_{ij}^u} \tau_{xx}^t \vec{e}_x \cdot \vec{n} dS &\approx \vartheta_{ij}^u \Delta y_j (\tau_{xx}^t|_{i+1,j} - \tau_{xx}^t|_{i,j}) \Rightarrow \mathcal{G}^x T_{xx}, \\ \int_{\Gamma_{ij}^v} \tau_{yy}^t \vec{e}_y \cdot \vec{n} dS &\approx \vartheta_{ij}^v \Delta x_i (\tau_{yy}^t|_{i,j+1} - \tau_{yy}^t|_{i,j}) \Rightarrow \mathcal{G}^y T_{yy}. \\ \bullet \int_{\Gamma_{ij}^u} \tau_{xy}^t \vec{e}_y \cdot \vec{n} dS &\approx \Delta x_{ij}^{xy} \tau_{xy}^t|_{i,j} - \Delta x_{i,j-1}^{xy} \tau_{xy}^t|_{i,j-1} \Rightarrow \mathcal{D}_x^\tau T_{xy}, \\ \int_{\Gamma_{ij}^v} \tau_{xy}^t \vec{e}_x \cdot \vec{n} dS &\approx \Delta y_{ij}^{xy} \tau_{xy}^t|_{i,j} - \Delta y_{i-1,j}^{xy} \tau_{xy}^t|_{i-1,j} \Rightarrow \mathcal{D}_y^\tau T_{xy}. \end{aligned}$$

После вычисления  $U_x^{n+1}$ ,  $U_y^{n+1}$  и  $P^{n+1}$ :

- 1) решаются дискретные аналоги **уравнений переноса** из используемой модели турбулентности (Смагоринского, Спаларта — Аллмараса,  $k - \varepsilon$ ,  $k - \omega$  или  $k - \omega$  SST);
- 2) рассчитываются значения  $\nu^t$  и  $k$  в момент времени  $t_{n+1}$ ;
- 3) при помощи **гипотезы Буссинеска** вычисляются  $T_{xx}^{n+1}$ ,  $T_{yy}^{n+1}$  и  $T_{xy}^{n+1}$ .

Дискретизация **уравнения переноса**  $\psi$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{ij}^{xy}} \psi dV + \int_{\Gamma_{ij}^x} [(\vec{v} - \vec{v}^g) \cdot \vec{n}] \psi dS - \int_{\Gamma_{ij}^{xy}} (\nu + \Gamma^\psi) \nabla \psi \cdot \vec{n} dS - \int_{\Omega_{ij}^{xy}} (\text{Prod} - \text{Dis} + \text{Add}) dV = 0. \\ \Rightarrow \frac{\mathcal{M}^{xy,n+1} \psi^{n+1} - \mathcal{M}^{xy,n} \psi^n}{\Delta t} + c^{xy} [\bar{U}^n - \bar{U}^{g,n}] \psi^n + S_{xy}^{ib,c,n} - \mathcal{K}^{xy,n} \Gamma_\psi^n - S_{xy}^\nu - \mathcal{M}^{xy,n} \text{PDA}^n = 0. \end{aligned}$$

# LS-STAG-дискретизация на $xy$ -сетке

## LS-STAG-дискретизация диффузионного члена

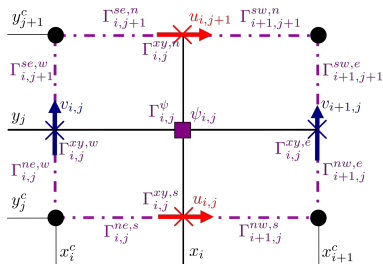
$$\int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} (\nu + \Gamma^\psi) \nabla \psi \cdot \vec{n} dS = \int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} (\nu + \Gamma^\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{e}_x \cdot \vec{n} dS + \int_{\Gamma_{i,j}^{xy}} (\nu + \Gamma^\psi) \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{e}_y \cdot \vec{n} dS =$$

$$= \int_{\Gamma_{i,j}^{xy,e}} [\nu + \Gamma^\psi] \frac{\partial \psi}{\partial x} dS - \int_{\Gamma_{i,j}^{xy,w}} [\nu + \Gamma^\psi] \frac{\partial \psi}{\partial x} dS + \int_{\Gamma_{i,j}^{xy,n}} [\nu + \Gamma^\psi] \frac{\partial \psi}{\partial y} dS - \int_{\Gamma_{i,j}^{xy,s}} [\nu + \Gamma^\psi] \frac{\partial \psi}{\partial y} dS.$$

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{xy,e}} [\nu + \Gamma^\psi] \frac{\partial \psi}{\partial x} dS \approx \frac{1}{2} (\Delta y_{i,j}^{xy} + \Delta y_{i+1,j}^{xy}) \frac{\partial \psi}{\partial x} |_{i+1,j} \left( \nu + \frac{\Gamma_{i,j}^\psi + \Gamma_{i+1,j}^\psi}{2} \right),$$

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{xy,n}} [\nu + \Gamma^\psi] \frac{\partial \psi}{\partial y} dS \approx \frac{1}{2} (\Delta x_{i,j}^{xy} + \Delta x_{i,j+1}^{xy}) \frac{\partial \psi}{\partial y} |_{i,j+1} \left( \nu + \frac{\Gamma_{i,j}^\psi + \Gamma_{i,j+1}^\psi}{2} \right).$$

## LS-STAG-дискретизация конвективных потоков



- Представляются в виде суммы потоков через грани КО  $\Omega_{i,j}^{xy}$ .
- Используется центральная интерполяция.
- На  $\Gamma^{ib}$  зависит от типов четвертой ячеек в КО  $\Omega_{i,j}^{xy}$ .

# Обтекание неподвижного кругового профиля

Модель турбулентности	Число ячеек	Re = 1000		Re = 3900	
		$C_{xa}$	Sh	$C_{xa}$	Sh
Эксперимент (Zdravkovich, 1997)		0,98	0,21	0,93	0,22
Эксперимент (Zahm, 1927)		1,12	—	1,01	—
LES, $\Delta^{\max}$ , $C_S = 0,2$	71 040	1,35	0,24	1,11	0,26
LES, $\Delta^{\max}$ , $C_S = 0,5$	71 040	1,37	0,25	1,10	0,25
S-A, RANS	71 040	1,37	0,25	1,13	0,25
S-A, DES, $C_S = 0,7$	71 040	1,37	0,25	1,11	0,25
$k - \epsilon$ , RANS	71 040	1,36	0,25	1,23	0,28
$k - \epsilon$ , LES, $\Delta^{\max}$ , $C_S = 0,9$	71 040	1,37	0,25	1,11	0,25
$k - \omega$ , RANS	71 040	1,32	0,24	1,18	0,24
$k - \omega$ , DES, $C_S = 1,0$	71 040	1,32	0,25	1,00	0,25
SST $k - \omega$ , RANS	71 040	1,34	0,25	1,14	0,25
(Braza et al., 1986)	—	1,15	—	—	—
LES (Breuer, 1998)	1 103 520	—	—	1,08	—
(Blackburn, 2001)					
SV LES	30 720	—	—	1,01	0,22
FV LES	855 040	—	—	1,07	0,24
(Rahman et al., 2007)					
$k - \epsilon$	46 304	1,00	0,15	1,00	0,15
Real $k - \epsilon$	46 304	—	0,17	—	0,20
SST $k - \omega$	46 304	—	0,23	—	0,25
(Patel, 2010), ANSYS					
$k - \epsilon$	388 550	1,17	—	0,74	—
SST $k - \omega$	388 550	0,99	—	0,62	—
LES	388 550	1,15	0,21	1,07	—

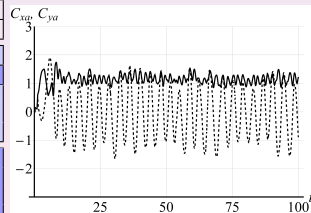


Рис. 6. Результаты расчетов при  $Re = 3900$  (RANS,  $k - \omega$  модель, сетка  $240 \times 296$ )

- 0 Введение
- 1 Метод LS-STAG для моделирования течений вязкой несжимаемой среды
- 2 Модификация метода LS-STAG для решения сопряженных задач гидроупругости
- 3 Модификация метода LS-STAG для расчета течений вязкой несжимаемой среды в рамках различных подходов к моделированию турбулентности
- 4 Программная реализация разработанных модификаций метода LS-STAG**
- 5 Основные результаты и выводы

# Программная реализация (последовательный код)

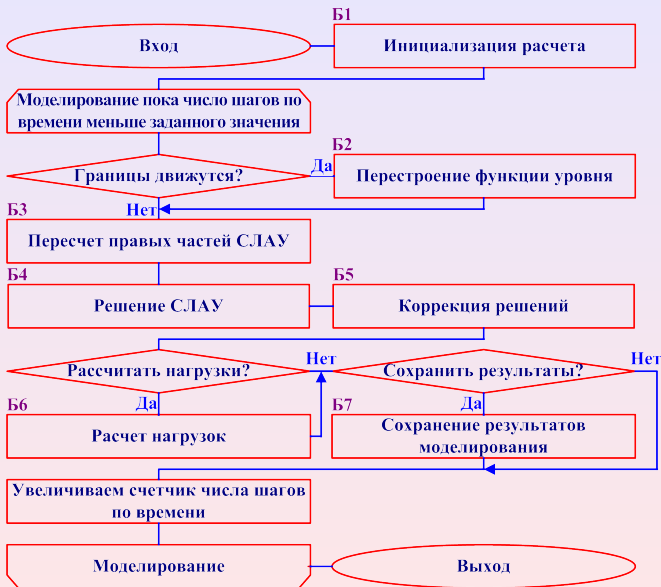


Рис. 7. Блок-схема работы программного комплекса

- Программные комплексы «LS-STAG» и «LS-STAG\_turb».
- C++, объектно-ориентированное программирование.
- Моделирование обтекания профилей произвольной формы и их систем, в т.ч. имеющих 1, 2 или 3 степени свободы.
- В «LS-STAG\_turb»: модели турбулентности Смагоринского, Спалларта — Аллмараса,  $k - \varepsilon$ ,  $k - \omega$ ,  $k - \omega$  SST в рамках подходов RANS, LES и DES.



# Средства для тестирования алгоритмов

## Тестовая задача (VerOscTest)

### Поперечные колебания кругового профиля:

$$Y_C = Y_C^0 + \begin{cases} A, & t < 10, \\ A \cos(2\pi S_e [t - 10]), & t \geq 10, \end{cases}$$

- $A$  — амплитуда колебаний;
- $S_e$  — кинематическое число Струхала;
- $Y_C^0$  и  $Y_C$  — ордината центра профиля в начальный и в текущий момент времени соответственно.

Обтекание моделируется при  $0 \leq t \leq 30$  с шагом  $\Delta t = 0,005$  на сетке  $240 \times 296$ .

- $A = 0,2$ ;
- $Re = 185$ ;
- $S_e/Sh = 1,2$ ;
- $Sh \approx 0,201$ .

## Рабочая станция PC1:

- платформа Intel N81;
- процессор Intel Core i3-4350T (Haswell) с поддержкой HyperThreading (4 логических ядра), 3100 МГц;
- ОЗУ DDR3-1333 8 ГБайт.

### Время счета, с



## Рабочая станция PC2:

- платформа Intel Z97;
- процессор Intel Core i7-4790K (Devil's Canyon) с поддержкой HyperThreading (8 логических ядра), 4400 МГц;
- ОЗУ DDR3-1600 16 ГБайт.

# Распараллеливание алгоритмов и оптимизация

**Операция 1** — умножение разреженной матрицы на вектор.

**Операция 2** — решение СЛАУ с трехдиагональными матрицами методом прогонки при выполнении сглаживания в многосеточном предобуславливателе.

**Операция 3** — решение СЛАУ методом BiCGStab без учета затрат на работу предобуславливателя.

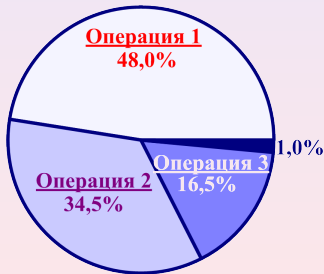


Рис. 8. Структура временных затрат при решении задачи VerOscTest (компилятор Intel C++ 15.0 с опцией /MT)

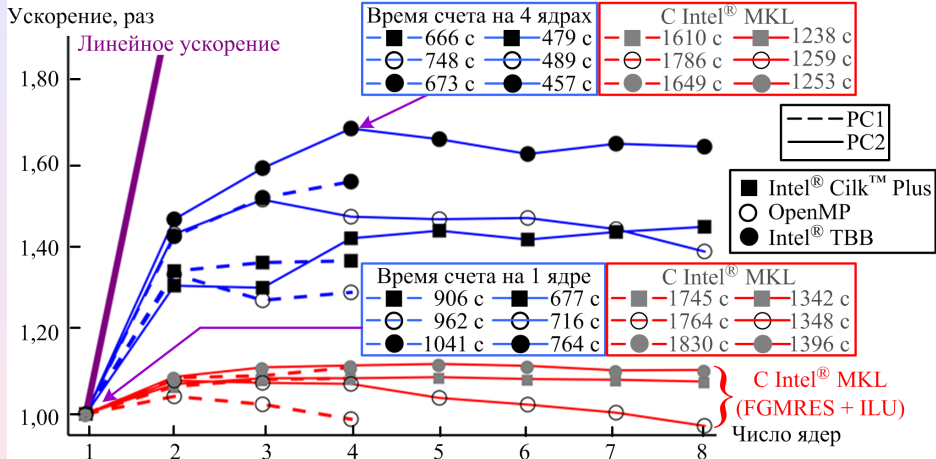
Используемые технологии параллельного программирования:

- Intel® Cilk™ Plus;
- OpenMP (стандарт 4.0);
- Intel® Threading Building Blocks.

Оптимизация

- Оптимизация кода.
- Вместо метода BiCGStab для решения СЛАУ реализован алгоритм метода FGMRES: при решении разностного аналога уравнения Пуассона с многосеточным предобуславливанием число итераций уменьшилось в 3 раза.

# Масштабируемость комплекса «LS-STAG\_turb»



По сравнению с исходным последовательным кодом время проведения расчета уменьшилось примерно в 5 раз при использовании одного ядра и в 7 раз при использовании 4-х ядер.

# Обтекание системы круговых профилей

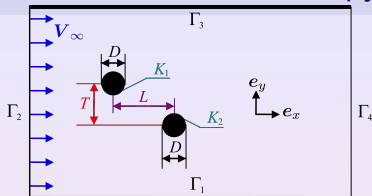


Рис. 9. Расчетная область

●  $T = 0$  — тандем профилей:  
 один нестационарный расчет  
 ( $0 \leq t \leq 100$ ,  $\Delta t = 0,01$ , 64  
 ячейки на  $D$ ) на PC1 (4 ядра,  
 Intel® Cilk™ Plus) — 4 минуты.

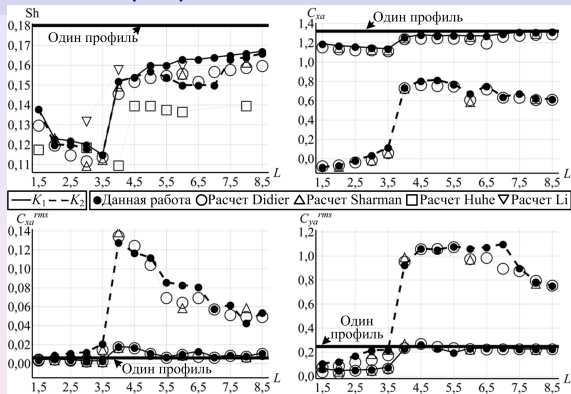
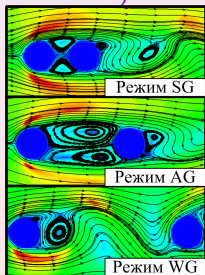


Рис. 10. Сравнение результатов при  $Re = 100$  и  $T = 0$  с известными в литературе данными<sup>abcd</sup>

<sup>a</sup> Didier E. Simulation de l'écoulement autour de deux cylindres en tandem // C. R. Mecanique. 2007. № 335. P. 696–701.

<sup>b</sup> Sharman B. et al. Numerical predictions of low Reynolds number flows over two tandem circular cylinders // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2005. № 47. P. 423–447.

<sup>c</sup> Huhe-Aode H. et al. Visual studies on wake structure behind two cylinders in tandem arrangement // Rep. Res. Inst. Appl. Mech. 1985. № 32. P. 1–20.

<sup>d</sup> Li J. et al. Numerical study of laminar flow past one and two circular cylinders // Comput. Fluids. 1991. № 19. P. 155–170.

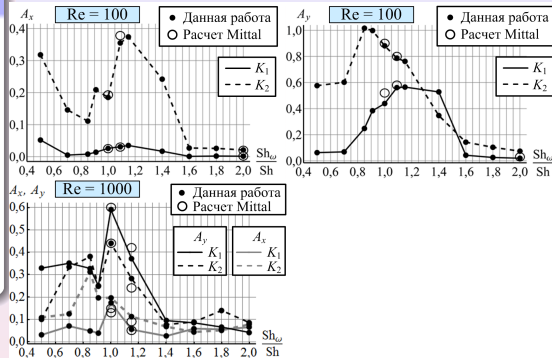
# Ветровой резонанс и бафтинг круговых профилей

$$L = 5,5, T = 0,7, D = 1,0, V_\infty = 1,0, m = 4,7273, \xi = 3,3 \cdot 10^{-4}, b = 4\pi m \xi \text{Sh}_\omega, \\ c = m(2\pi \text{Sh}_\omega)^2, \text{Sh}_\omega / \text{Sh} = \{0,5, \dots, 2,0\}$$

Уравнения движения профилей

$$\begin{cases} m\ddot{x}_{*,i} + b\dot{x}_{*,i} + cx_{*,i} = F_{x_a,i}, \\ m\ddot{y}_{*,i} + b\dot{y}_{*,i} + cy_{*,i} = F_{y_a,i}, \end{cases}$$

- $m$  — масса профиля;
- $b$  — коэффициент демпфирования;
- $c$  — жесткость связи;
- $(x_{*,i}, y_{*,i})$  — отклонение  $i$ -го профиля от положения равновесия;
- $i = \{1, 2\}$ .



Результаты расчетов хорошо согласуются с известными в литературе данными<sup>ab</sup>.

<sup>a</sup> Mittal S., Kumar V. Flow-induced oscillations of two cylinders in tandem and staggered arrangements // J. Fluids Struct. 2001. № 15. P. 717–736.

<sup>b</sup> Mittal S., Kumar V. Vortex induced vibrations of a pair of cylinders at Reynolds number 1000 // Int. J. Comput. Fluid Dyn. 2004. № 18. P. 601–614.

Сетка  $666 \times 344$ ,  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  
 $\text{Re} = 1000$ .



- 0 Введение
- 1 Метод LS-STAG для моделирования течений вязкой несжимаемой среды
- 2 Модификация метода LS-STAG для решения сопряженных задач гидроупругости
- 3 Модификация метода LS-STAG для расчета течений вязкой несжимаемой среды в рамках различных подходов к моделированию турбулентности
- 4 Программная реализация разработанных модификаций метода LS-STAG
- 5 Основные результаты и выводы

## Основные результаты и выводы

Рассмотрена двумерная задача о моделировании обтекания неподвижных или совершающих колебания с 1, 2 или 3 степенями свободы профилей произвольной формы и их систем потоком вязкой несжимаемой среды. Разработаны модификации метода LS-STAG для решения RANS, LES и DES уравнений гидродинамики. Построена дискретизация уравнений из моделей турбулентности Смагоринского, Спаларта — Аллмараса,  $k - \varepsilon$ ,  $k - \omega$ ,  $k - \omega$  SST. Модификации реализованы в рамках программных комплексов.

По результатам исследований могут быть сделаны следующие выводы.

- 1 Модификация метода LS-STAG для расчета течений с подвижными погруженными границами может быть эффективной альтернативой сеточным методам с подвижной сеткой, согласованной с телом.
- 2 При моделировании обтекания профилей при высоких значениях  $Re$  можно использовать разработанные модификации метода LS-STAG, позволяющие проводить RANS, LES и DES моделирование.
- 3 Разработанные программные комплексы могут использоваться для численного решения сопряженных задач гидроупругости на различных вычислительных системах с общей памятью.
- 4 В качестве направлений дальнейших исследований можно выделить модификацию метода LS-STAG для расчета течений вязкоупругих и неньютоновых жидкостей и обобщение метода на трехмерный случай.

# Основные результаты и выводы

Рассмотрена двумерная задача о моделировании обтекания неподвижных или совершающих колебания с 1, 2 или 3 степенями свободы профилей произвольной формы и их систем потоком вязкой несжимаемой среды. Разработаны модификации метода LS-STAG для решения RANS, LES и DES уравнений гидродинамики. Построена дискретизация уравнений из моделей турбулентности Смагоринского, Спаларта — Аллмараса,  $k - \varepsilon$ ,  $k - \omega$ ,  $k - \omega$  SST. Модификации реализованы в рамках программных комплексов.

По результатам исследований могут быть сделаны **следующие выводы**.

- 1 Модификация метода LS-STAG для расчета течений с подвижными погруженными границами может быть эффективной альтернативой сеточным методам с подвижной сеткой, согласованной с телом.
- 2 При моделировании обтекания профилей при высоких значениях  $Re$  можно использовать разработанные модификации метода LS-STAG, позволяющие проводить RANS, LES и DES моделирование.
- 3 Разработанные программные комплексы могут использоваться для численного решения сопряженных задач гидроупругости на различных вычислительных системах с общей памятью.
- 4 В качестве направлений дальнейших исследований можно выделить модификацию метода LS-STAG для расчета течений вязкоупругих и неньютоновых жидкостей и обобщение метода на трехмерный случай.





СПАСИБО  
ЗА  
ВНИМАНИЕ!