

Численное исследование законов
оптимального управления
многочастотными движителями для
перемещения в вязкой несжимаемой
жидкости



*Казань, КФУ
ИММ, каф. аэрогидромеханики
Захарова О.С., Нуриев А.Н.*

Введение

Виброробот – мобильное устройство, не имеющее подвижных внешних частей (колес, гусениц, винтов и т.д.), способное перемещаться в сопротивляющейся среде лишь за счет колебаний внутренней массы относительно корпуса.

Направления исследования:

1. Оптимизация движения сферического виброробота по энергозатратам.
 - Модель M1: оптимизация в условиях квазистационарности
 - Модель M2: оптимизация с учетом наследственных сил
2. Прямое численное моделирование движения виброробота в вязкой жидкости в рамках найденных M1-,M2- классов оптимальных законов.

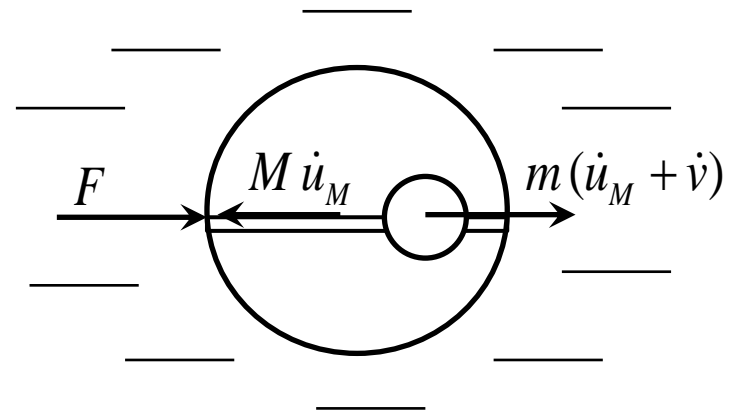


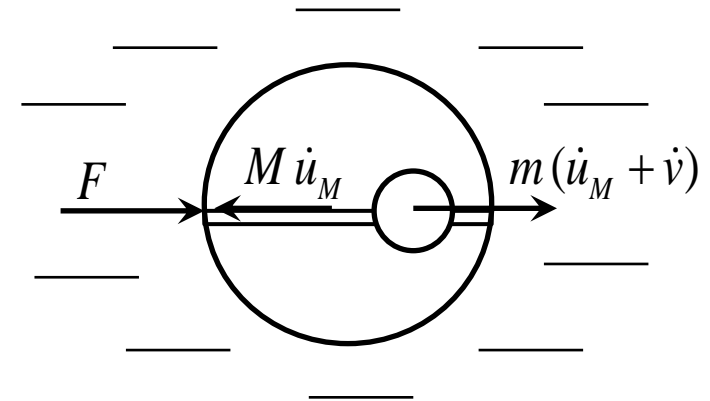
Рис.1

1.1 Постановка задачи оптимизации

Основное уравнение, описывающее движение системы:

$$(m + M)\dot{u} + F[u(t)] = -m\dot{v} \quad (1)$$

- $U(u) = \langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$ - средняя скорость движения тела;
- $N(u) = \langle u \cdot F[u(t)] \rangle$ - мощность, затрачиваемая на преодоление сил сопротивления;
- $\eta = N(\langle u \rangle) / N(u)$, $0 \leq \eta \leq 1$, - энергетический коэффициент



Задача: Определить $x(t) \{x(0) = x(T)\} : N(u) \rightarrow \min, \langle u \rangle = U, T$ - фиксированный



$$\begin{aligned} N(u) &\rightarrow \min \\ \langle F[u(t)] \rangle &= 0, \quad \langle u \rangle = U \end{aligned} \quad (2)$$

$$F[u(t)] = \frac{1}{2} C_x \pi \rho a^2 |u|u + 6\pi \rho \nu a^2 \int_{-\infty}^t \frac{du/d\tau}{\sqrt{\pi \nu (t - \tau)}} d\tau \quad (3)$$

1.2 Решение задачи для гидродинамического сопротивления в условиях квазистационарности. Модель M1

Сила сопротивления однозначно определяется мгновенной скоростью корпуса и в безразмерных переменных имеет вид

$$F(u) = C_x(u)|u|u \quad (4)$$

Зависимость коэффициента сопротивления задается по известным экспериментальным данным по обтеканию сферы [1].

Решая задачу оптимизации

$$N = \langle F(u) \cdot u \rangle \rightarrow \min$$

$$\langle F(u) \rangle = 0, \langle u \rangle = U \quad (2)$$

получим, что в практически интересном диапазоне чисел Рейнольдса $U < 10^3$:

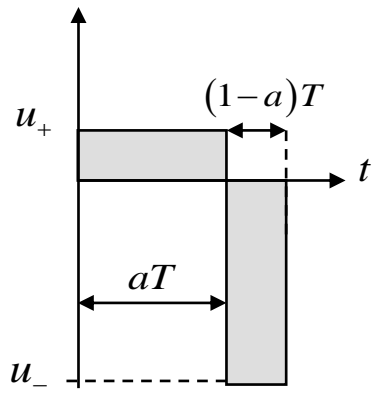


Рис.3

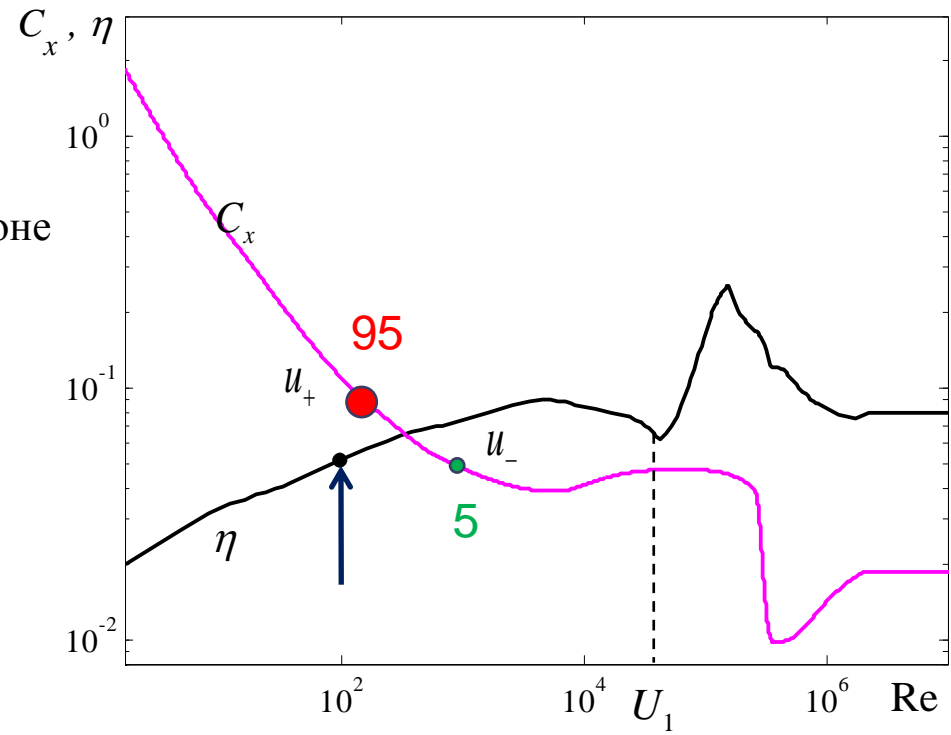


Рис.2

[1] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. – 713 с.

1.3 Решение задачи для гидродинамического сопротивления.

Модель M2: учет предыстории движения

$$F[u(t)] = C_x(|u|Re)|u|u + s \int_{-\infty}^t \frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (5)$$

$$N = \left\langle C_x(|u| \cdot Re)|u|^3 \right\rangle + s \left\langle u \cdot \int_{-\infty}^t \frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right\rangle \rightarrow \min \quad (6)$$

$$\left\langle C_x(|u| \cdot Re)|u|u \right\rangle = 0 \quad \langle u \rangle = 1$$

Параметры задачи: $Re = \frac{Ud}{\nu}, s = 12\sqrt{\frac{\nu}{\pi U^2 T}}$

Получаем следующее интегральное уравнение для $u(t)$:

$$\left(C_x(|u|Re)|u|^3 \right)' + s \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(\tau) \frac{\text{sign}(t-\tau)}{\sqrt{|t-\tau|}} d\tau + \lambda|u| - \mu = 0 \quad (7)$$

$$0 < t < 1/2 \quad \dot{u}(0) = \dot{u}(1/2) = 0$$

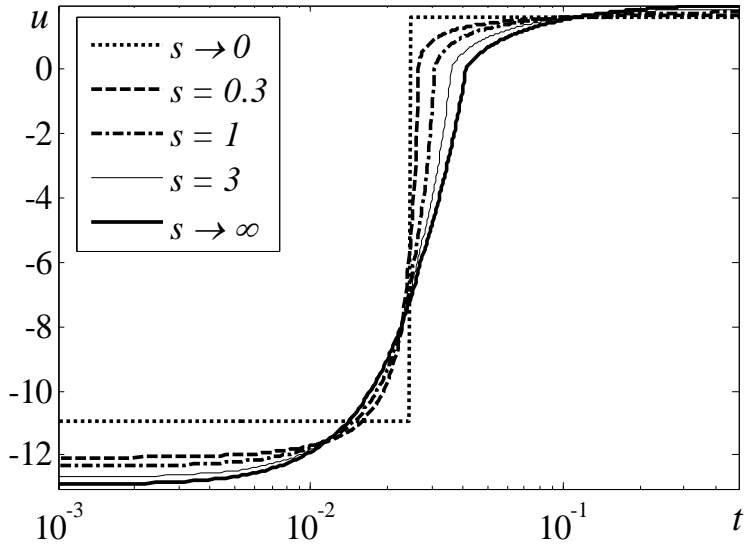


Рис. 4 Re = 40

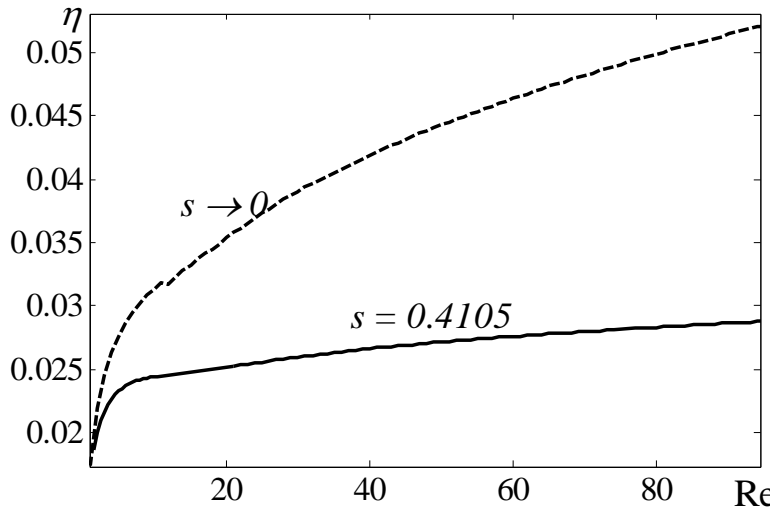


Рис. 5

2.1 Прямое численное моделирование. Постановка задачи

Взаимодействия виброробота с вязкой жидкостью описывается уравнениями Навье-Стокса:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \nabla U = -\nabla p + \frac{2}{\text{Re}_n} \Delta U \\ \nabla \cdot U = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Закон движения :

$$u_M = u(\tau T_n) + C, \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

$$C: \bar{F} = \langle F[u_M(t)] \rangle = 0 \quad (9)$$

$$\text{Re}_n = U_{\max} d / \nu \quad T_n = T / (d U_{\max}^{-1})$$

$$\exists x = x(t) : \left\{ \begin{array}{l} a) x(t) = x(t+T), v = \dot{x}, \\ b) \dot{u}_M = -\mu_2 \dot{v} - \frac{3}{4} \mu_1 F_x \end{array} \right. \quad (1)$$

Силы действующие на корпус: $F = \int_S p n ds - \int_S \bar{\sigma} \cdot n ds$

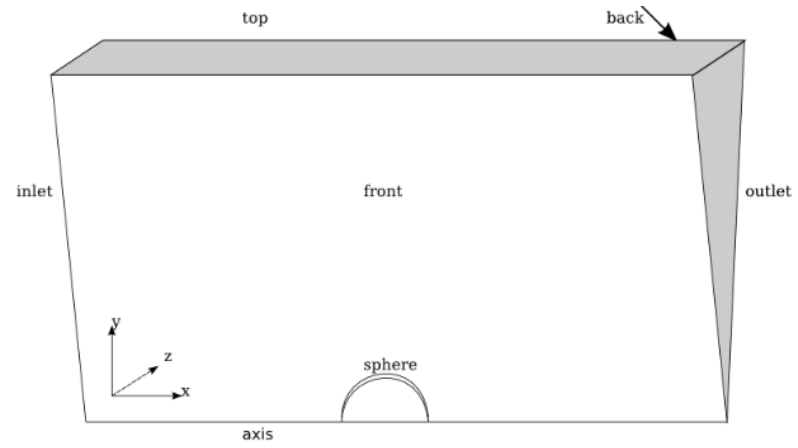


Рис 6. Расчетная область
Размеры в пл. OXY :50x15

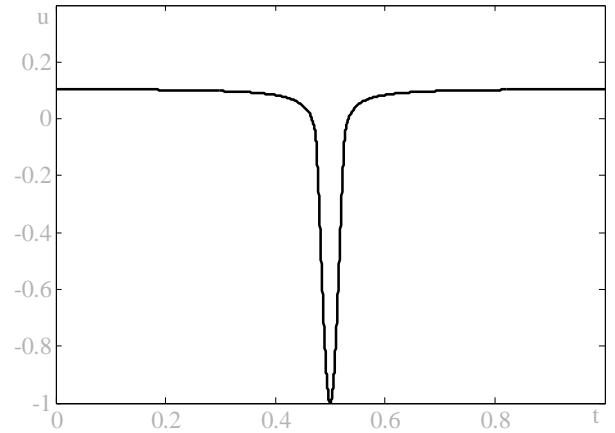


Рис.7. Закон $u(\tau)$ -решение задачи оптимизации

2.2 Геометрия и граничные условия

Задача будет решаться в диапазоне параметров, отвечающих невысоким средним скоростям движения корпуса. В данном диапазоне предполагается наличие осевой симметрии формирующихся течений.

Удобно перейти в подвижную систему координат, связанную с вибророботом: $p = \tilde{p} + x\dot{u}_M$

Табл. 1 Граничные условия

Граница	Условие
Γ_{inlet}	$\begin{cases} \partial u / \partial x = 0, p = -\dot{u}_M x, u_0 > 0 \\ u = -u_M, \partial p / \partial x = -\dot{u}_M, u_0 < 0 \\ v = 0 \end{cases}$
Γ_{outlet}	
Γ_{top}	$\frac{\partial p}{\partial n} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$
Γ_{sphere}	$u = v = 0, \frac{\partial p}{\partial n} = 0$
$\Gamma_{front}, \Gamma_{back}$	"wedge"
Γ_{axis}	"empty"



Рис 7. Расчетная область
Размеры в пл. OXY :50x15

Для расчетов были использованы две сетки m1, m2.
 m1: число ячеек $\square 3 \cdot 10^4$
 m2: число ячеек $\square 10^5$

Н. у.: $U(u_x, u_y) = (1, 0), p(x, y) = 0$

2.4 Дискретизация системы и алгоритм решения

Система уравнений для произвольной ячейки сетки объемом V запишется в виде:

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (UU) dV = - \int_V \nabla p dV + \nu \int_V \Delta U dV$$

$$\int_V \nabla \cdot U dV = 0$$

Численное решение задачи проводилось на основе алгоритма PISO.

Алгоритм коррекции средней скорости:

1. Проводится расчет движения робота (с ускорением $a_f = \dot{u}_M$) со средней скоростью \bar{U} до установления:

$$|\bar{F} - \bar{F}_{last}| < \delta, \quad \delta = \frac{\varepsilon}{10}$$

2. Если $|\bar{F}| > \varepsilon$, то коррекция $a = a_f + \frac{dv}{Tk}$ $dv = -\bar{F} \frac{\bar{U} - \bar{U}_{old}}{\bar{F} - \bar{F}_{old}}$ и переход к шагу 3

Если $|\bar{F}| < \varepsilon$, то получено решение.

3. Рассчитывается k периодов движения с новым ускорением a

$$\bar{F}_{old} = \bar{F} \quad \bar{U}_{old} = \bar{U}$$

Осуществляется переход к шагу 1.

Таблица 2. Схемы интерполяции

$\nabla(UU)$	Gauss GammaV
$\nu \Delta U$	Gauss linear corrected
∇p	Gauss linear
$\frac{\partial U}{\partial t}$	Неявная схема Эйлера

2.2 Результаты .Выбор оптимальных законов движения

Табл. 2 Сравнение оптимальных законов, полученных в моделях M1, M2 для $T=40$ при $Re=[300,500,950]$

Re	Numerical results			Analytic results		M2	
	Test $\eta_{num}, \%$	M1 $\eta_{num}, \%$	M2 $\eta_{num}, \%$	M1 $\eta, \%$	M2 $\eta, \%$	$\frac{\eta_{num(M2)}}{\eta_{num(test)}}$	$\frac{\eta}{\eta_{num(M2)}}$
300	0.16	-	0.43	-	1.97	2.69	4.58
500	0.3	0.612	0.745	4.34	2.34	2.48	3.14
950	0.6	1.215	1.368	5.25	3	2.21	2.2

Диапазон параметров:
 $Re < 1000 (u_p < 120)$
 $T < 42$

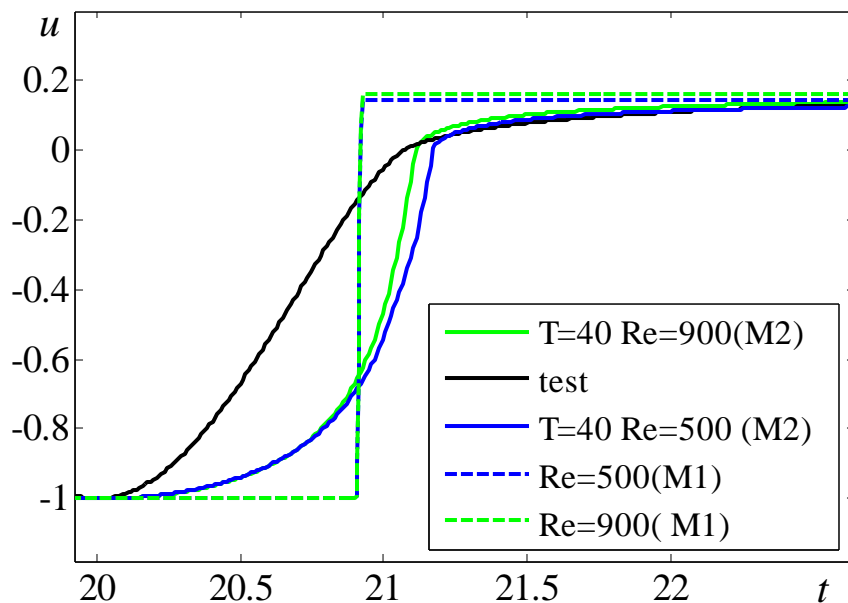


Рис. 8

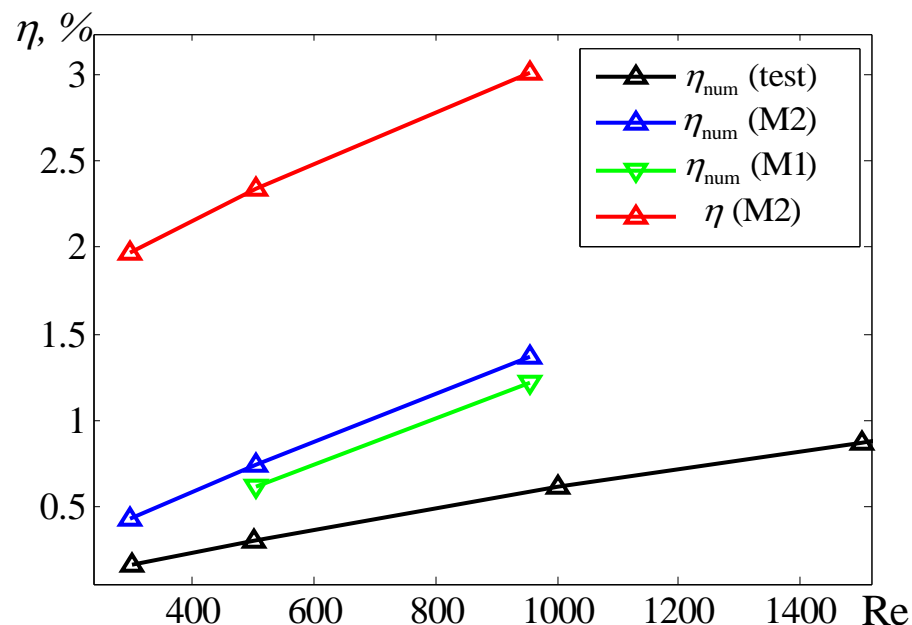


Рис. 9

M1-квазипериодическая модель; M2 – модель с учетом сил Бассе

2.3 Траектории движения невесомых частиц

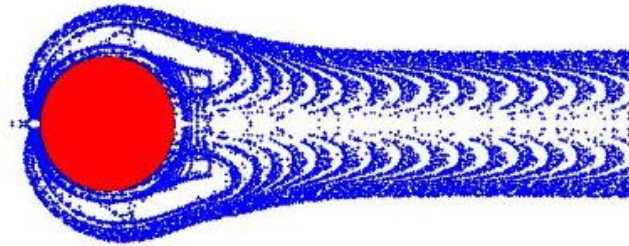


Рис.10. $T = 40$, $Re = 300$ ($u_p = 29, u_{av} = 11$) $\eta = 0.43\%$

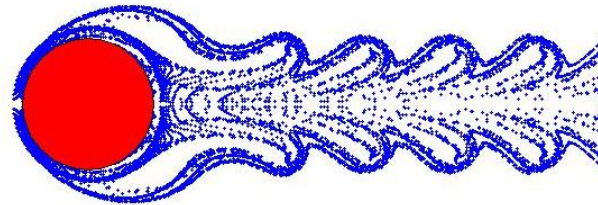


Рис.11. $T = 40$, $Re = 500$ ($u_p = 54, u_{av} = 24$) $\eta = 0.75\%$

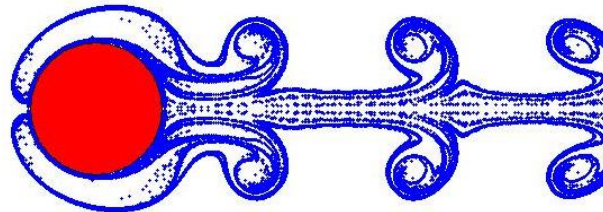


Рис.12. $T = 40$, $Re = 950$ ($u_p = 114, u_{av} = 60$) $\eta = 1.37\%$

2.4 Визуализация и трехмерный расчет

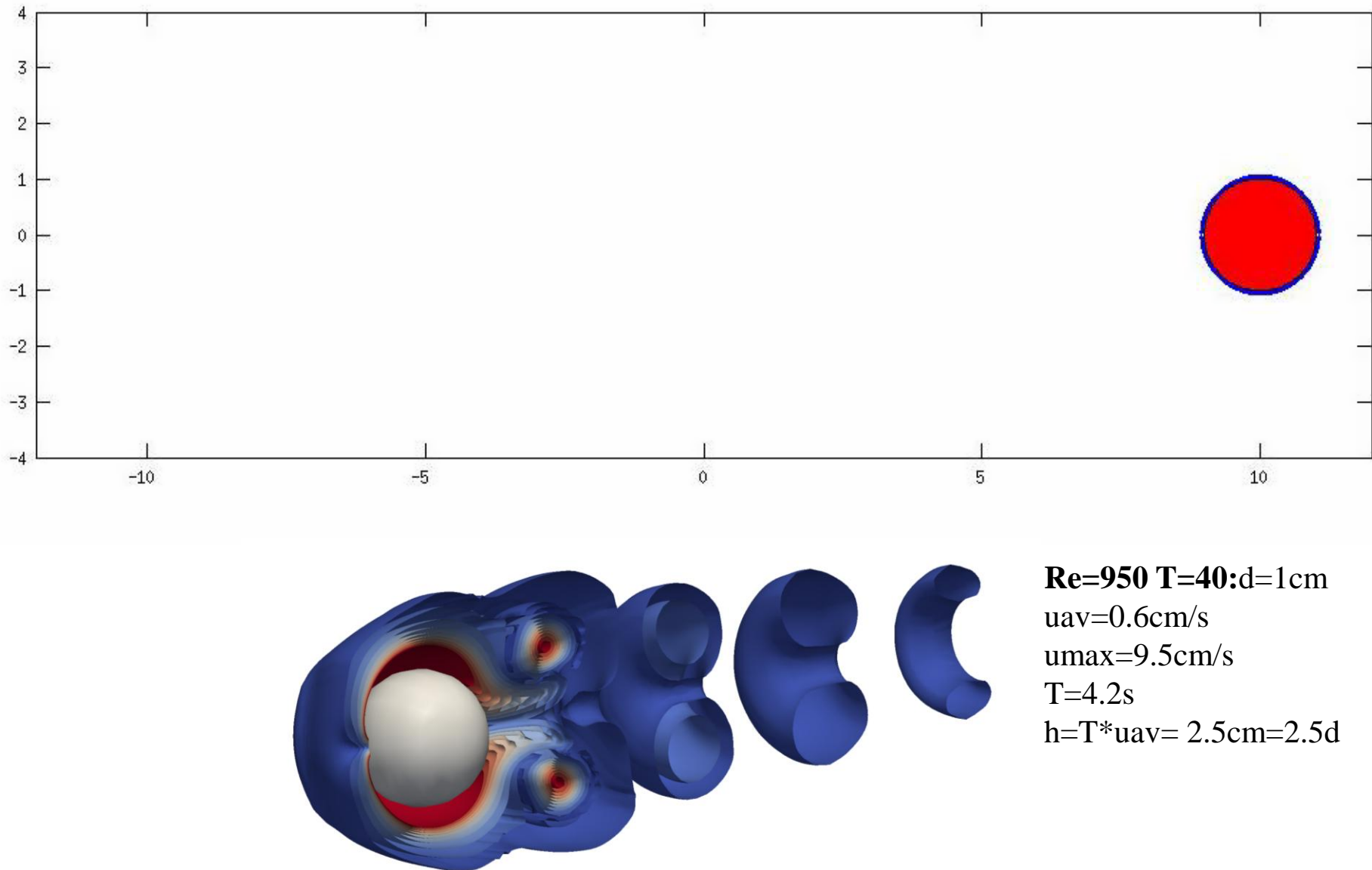


Рис.13 Визуализация течения при Re=950 T=40: Результат трехмерного моделирования

Выводы

1. Квазистационарная модель M1 позволяет получить верхнюю оценку эффективности движения виброробота в вязкой жидкости при движении с различными средними скоростями
2. Модель M2 позволяет учитывать влияние продолжительности периода на оптимальные законы.
3. Численное моделирование показывает, что решение модельных задач оптимизации позволяет отыскивать эффективные законы движения, обеспечивающие ненулевую среднюю скорость движения.
4. Силы Бассе, не оказывая влияния на коэффициенты вязких сил при разложении сил на слагаемые, в рамках аналитической задачи способствуют получению физически реализуемых (неразрывных) и более эффективных законов движения.
5. Улучшение согласования аналитических и численных результатов, получение более точных оценок и повышение показателя эффективности возможно при выборе в задаче оптимизации более реалистичных представлений сил Бассе и задании в качестве коэффициента при вязких силах аппроксимации коэффициента сопротивления по численным результатам.

Работа выполнена при поддержке РФФИ(гранты 14-01-31230, 15-01-06029)

Спасибо за внимание!