

## Отзыв официального оппонента

о диссертации Панфёрова Антона Александровича

”Алгоритмы символьных вычислений в системах компьютерной алгебры для линейных дифференциальных систем с выделенными неизвестными”,  
представленной на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности 05.13.11 – математическое и  
программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и  
компьютерных сетей

В представленной диссертации изучается возможность алгоритмического решения некоторых вопросов, связанных с однородными системами линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами из дифференциального поля  $(K, ')$  нулевой характеристики (скажем, из поля  $\mathbb{C}(z)$  рациональных функций). Рассматриваемые системы, вообще говоря, не предполагаются разрешимыми относительно производной:

$$Ay' + By = 0, \quad y = (y_1, \dots, y_m)^T \in K^m, \quad A, B \in \text{Mat}(m, K), \quad (1)$$

т. е. матрица  $A$  может быть вырожденной.

Отличительным и важным моментом является то, что изучаемые вопросы ставятся по отношению не ко всем неизвестным  $y_1, \dots, y_m$  системы, а только по отношению к некоторой части неизвестных, называемых *выделенными*. (Например, для данной системы, выяснить – существуют ли ее решения, выделенные компоненты которых являются рациональными функциями.) Такого рода вопросы сводятся к проблеме построения заранее выделенной части компонент решений, однако, если система неприводима в некотором смысле, – нет возможности получить систему меньшего размера, для этой части компонент. Поэтому, как правило, системы компьютерной алгебры не предоставляют специализированных средств решения систем дифференциальных уравнений относительно части неизвестных. Существующие и реализованные алгоритмы поиска решений (основанные, в частности, на дифференциальной теории Галуа) позволяют находить решения разного вида (например, принадлежащие тому или иному дифференциальному расширению основного поля  $K$ ), но только такие, *все* компоненты которых имеют указанный вид.

Для решения проблемы частичного построения решений С. А. Абрамовым и М. Бронштейном был разработан алгоритм (АВ-алгоритм), реализация которого вошла в систему компьютерной алгебры Maple. Этот алгоритм применим к *нормальным* системам линейных дифференциальных уравнений, т. е. к системам (1) с невырожденной матрицей  $A$  и, тем самым, представимым в виде

$$y' = By.$$

АВ-алгоритм позволяет построить по заданной нормальной системе с выделенными неизвестными новую систему, неизвестными в которой будут только выделенные неизвестные исходной системы и их производные. Решение построенной системы позволяет получить выделенные компоненты решений исходной системы.

АВ-алгоритм явился отправной точкой предлагаемой диссертационной работы, главная цель которой состояла в его обобщении на случай систем (1) с *вырожденной* матрицей

$A$ , называемых *дифференциально-алгебраическими*. Эта цель была полностью достигнута: один из основных результатов диссертанта – алгоритм Extract, излагаемый во второй главе работы, – позволяет преобразовать исходную систему (1) к виду, пригодному для применения АВ-алгоритма, т. е. получить нормальную систему с выделенной частью неизвестных. Точнее, выходными данными этого алгоритма являются две системы – дифференциальная  $S_d$  и алгебраическая  $S_a$ . Система  $S_d$  является нормальной, но в нее входят, вообще говоря, не все выделенные переменные исходной системы, а только их часть, а остальные выделенные переменные исходной системы, не вошедшие в  $S_d$ , выражаются через вошедшие в  $S_d$  как раз посредством системы  $S_a$ .

Еще один интересный результат работы, излагаемый в третьей и четвертой главах, заключается во введении понятия *спутниковой* неизвестной по отношению к набору выделенных неизвестных системы и в разработке различных алгоритмов по распознаванию такого рода неизвестных для данной системы. Определяющее свойство спутниковой неизвестной – принадлежность соответствующей компоненты любого решения системы дифференциальному расширению основного поля  $K$ , полученному присоединением к  $K$  *выделенных* компонент всех решений системы.

В пятой главе работы представлен программный комплекс символьных вычислений в среде компьютерной алгебры Maple, разработанный диссертантом на основе созданных им и изложенных в предшествующих трех главах алгоритмов.

Представленная Антоном Александровичем Панфёровым диссертационная работа написана на высоком научном и методическом уровне и имеет законченный характер, ее автор ясно продемонстрировал владение фундаментальными знаниями из дифференциальной алгебры и их успешное сочетание с важной алгоритмической стороной вопроса при решении поставленных перед ним практических задач. Не имею никаких существенных замечаний, а некоторые неизбежные математические и стилистические опечатки несколько не умаляют общее положительное впечатление о работе. Считаю, что выполненное научное исследование вносит большой вклад в развитие систем компьютерной алгебры, удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, и его автор достоин присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

ст.н.с. Института проблем передачи информации  
им. А. А. Харкевича РАН

к. ф.-м. н.

Р. Р. Гонцов

30 ноября 2018 г.