

УТВЕРЖДАЮ

И.о. Первого проректора -  
проректора по научной работе

~~университета дружбы народов~~

Докукин

7 2018 г.

### ОТЗЫВ

ведущей организации о диссертации Панфёрова Антона Александровича «Алгоритмы символьных вычислений в системах компьютерной алгебры для линейных дифференциальных систем с выделенными неизвестными», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.11 – математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей

Диссертационное исследование А.А. Панфёрова посвящено системам однородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые автор записывает в матричном виде

$$A_r(x)y^{(r)} + A_{r-1}(x)y^{(r-1)} + \dots + A_0(x)y = 0,$$

здесь  $y$  — столбец из  $n$  неизвестных, а  $A_r, \dots, A_0$  — матрицы размера  $n$  на  $n$ . Эту систему будем далее называть линейным обыкновенным дифференциальным уравнением с матричными коэффициентами (ЛОДУ). В центре внимания автора — разработка символьных методов поиска выделенных компонент решений ЛОДУ.

Концепция выделенных переменных была введена в теорию ЛОДУ С.А. Абрамовым и М. Броншейном. В ее основе лежат два наблюдения. Во-первых, в прикладных задачах не всегда интересны все неизвестные,

используемые для описания математической модели. Во-вторых, в прикладных задачах часто известны те или иные свойства некоторых из неизвестных, участвующих в описании математической модели. Поэтому неизвестные, формирующие столбец  $y$ , в прикладных задачах естественным образом делятся на выделенные и невыделенные переменные.

На наш взгляд хороший пример такой задачи доставляет математическая модель волноводной дифракции (Свешников А.Г., 1971; Диваков Д.В., 2017). Применение неполного метода Геллеркина сводит исследование этой модели к решению краевой задачи для ЛОДУ. Небольшая часть неизвестных, участвующих в этой задаче, описывает излучение в дальней зоне. Эти неизвестные и формируют множество выделенных переменных. На практике это означает, что только выделенные величины являются наблюдаемыми и относительно них имеется некоторая априорная информация. Например, при исследовании ловушечных мод волновода (Боголюбов А.Н. и др., 2005) а priori известно, что при достаточно больших значениях  $x$  эти неизвестные обращаются в нуль.

Поэтому у нас не вызывает сомнения, что разрабатываемые автором алгоритмы исследования ЛОДУ с выделенными неизвестными будут востребованы при моделировании широкого класса прикладных задач, в том числе относящихся к весьма актуальным задачам проектирования волоконно-оптических сетей и датчиков. Но вызывает сожаление отсутствие описания такого рода задач в тексте диссертации.

Следует также заметить, что вопрос об исключении неизвестных в ЛОДУ естественным образом возник еще в XIX веке. В первую очередь здесь следует упомянуть лекции Л. Шлезингера по линейным дифференциальным уравнениям (1908), где в конце 9 лекции по существу рассматривается ЛОДУ в нормальной форме с одной выделенной переменной, а далее в 10 лекции это обсуждение находит приложение при исследовании взаимосвязи теорем Фукса и Соважа (Sauvage). Это — важнейшие теоремы аналитической теории ЛОДУ, поэтому

алгоритмизация возникших вокруг них методов безусловно важна. Однако в диссертации эта связь не упоминается.

Обращаясь к содержанию диссертации, следует прежде всего отметить, что в работах С.А. Абрамовым и М. Броншейном был предложен и реализован в системе компьютерной алгебры Maple алгоритм (АВ-алгоритм), который позволяет для ЛОДУ вида

$$y' = Ay$$

с выделенными переменными составить ЛОДУ, содержащее только выделенные неизвестные и их производные. Основная цель представленной диссертационной работы — разработка в Maple процедуры, позволяющей обобщить имеющуюся реализацию АВ-алгоритма на ЛОДУ, произвольного вида, в том числе с вырожденным ведущим коэффициентом  $A_r$ . Эта цель А.А. Панферовым действительно достигнута, алгоритм четко описан, состоятельность его реализация в Maple подтверждена в серии экспериментов.

Разработанный как вспомогательный алгоритм Extract, который позволяет сводить произвольную систему к системе с невырожденным старшим коэффициентом, очень полезен и сам по себе и наверняка найдет много приложений.

Третья и четвертая главы диссертации посвящены разработке понятия сателлитных неизвестных и способов их определения. Важность этого вопроса проиллюстрирована очень выразительным примером из теории устойчивости.

Полученные в диссертации результаты обладают новизной в части разработки новых символьных алгоритмов преобразования линейных дифференциально-алгебраических систем и распознавания сателлитных неизвестных в линейных дифференциальных системах с выделенными неизвестными.

Как уже было отмечено выше, в диссертации не обсуждаются нетривиальные примеры ЛОДУ с выделенными переменными, идущие из прикладных задач. Как следствие этого диссертант не рассматривает один из наиболее интересных для нас практических вопросов — оптимизация АВ-

алгоритма на случай ЛОДУ с разреженными матрицами. Между тем, применение метода Канторовича и тем более метода конечных элементов сводит задачи математической физики к ЛОДУ с сильно разреженными матрицами большого порядка. Без учета этого обстоятельства применение разработанных алгоритмов к системам большого порядка может быть довольно затратным.

Результаты диссертации опубликованы в 10 научных работах: 4 статьи в научных журналах и изданиях, которые включены в перечень российских рецензируемых научных журналов и изданий для опубликования основных научных результатов диссертаций, 2 работы в зарубежных научных изданиях, 4 работы в материалах всероссийских и международных конференций. Основные результаты опубликованы в следующих работах:

Панферов, А.А. Системы дифференциальных уравнений с выделенной частью неизвестных // Программирование. — 2015. — №2. — С. 26–36.

Панфёров, А.А. О разбиениях множества выделенных неизвестных в линейных дифференциально-алгебраических системах // Программирование. — 2016. — №2. — С. 41–48.

Panferov, A.A. Selected and satellite unknowns in linear differential systems // Advances in Applied Mathematics. — 2017. — vol. 85. — P. 1–11.

Панфёров, А.А. Частичные алгоритмы определения сателлитных неизвестных // Программирование. — 2017. — №2. — С. 72–80.

Panferov, A.A. Linearly satellite unknowns in linear differential systems // In: Schneider C., Zima E. (eds) Advances in Computer Algebra. — Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, — Springer, Cham. — 2018. — vol. 226, — P. 215–227.

Панфёров, А.А. Сателлитные неизвестные в неприводимых дифференциальных системах // Программирование. — 2018. — №2. — С.42–50.

В автореферате полно в сжатом виде представлены все результаты диссертации.

Описанные результаты имеют большую практическую значимость для компьютерной алгебры. Они могут использоваться в новых и существующих программных системах символьных вычислений. Программный код

разработанной процедуры Extract и пакета Satellite находятся в открытом доступе по адресу <http://www.ccas.ru/ca/>.

Полученные в диссертации результаты — алгоритмы и их реализация — могут быть рекомендованы для дальнейшего развития и использования в таких научных организациях как МГУ, ВЦ им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Объединенный институт ядерных исследований, Саратовский государственный университет, Сибирский федеральный университет, НИИЯФ МГУ, ИПМ им. М.В. Келдыша.

При этом диссертация не свободна от недостатков, а именно:

1. Приводимые в диссертации оценки сложности разработанных алгоритмов не учитывают сложность выполнения операций в основном поле.
2. Описание реализации разработанных алгоритмов не достаточно детальное, не представлена информация об объёме кода.

Приведённые замечания не влияют на общую высокую оценку диссертационной работы.

**Выводы.** Диссертация Панфёрова Антона Александровича является завершённой научно-квалификационной работой, в которой предложены символьные алгоритмы и их реализация для преобразования линейных дифференциальных систем с выделенными неизвестными и распознавания спутниковых неизвестных в таких системах. Представленные новые алгоритмы, представляют интерес с научной точки зрения, позволяя строить нетривиальные частичные решения для более широкого класса линейных однородных дифференциальных систем.

Тема диссертационной работы является актуальной, практически значимой. Область научных исследований и тематика диссертационной работы соответствуют специальности 05.13.11 – «Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей».

Диссертация в соответствии с требованиями «Постановления Правительства Российской Федерации о порядке присуждения ученых

степеней» от 24.09.2013 г. № 842 является законченной квалификационной работой, а её автор Панфёров Антон Александрович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.11 – «Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей».

Отзыв рассмотрен и одобрен на заседании кафедры прикладной информатики и теории вероятностей (протокол № 0200-19-04/04 от 13 ноября 2018 г.) Российского университета дружбы народов, где ранее было заслушано и обсуждено сообщение Панфёрова А.А. по теме его диссертационной работы.

Профессор кафедры прикладной информатики \_\_\_\_\_

и теории вероятностей РУДН, д.ф.-м.н., профе

Л.А. Севастьянов

Председательствующий на заседании кафедры прикладной информатики

и теории вероятностей РУДН, д.ф.-м.н., доцент

Ю.В. Гайдамака