Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(Государственный университет)

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ Т. В. Кондранин
"___" _________________ 20_ г.

Факультет управления и прикладной математики
Кафедра системного программирования

ПРОГРАММА

по курсу: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

по направлению 511660
курс 4
семестр 8
лекции 32 часа — Экзамен - 8 семестр
практические (семинарские)
занятия 0 часов
лабораторные занятия 0 часов

Программу составил: к.ф-м.н. А.В. Шокуров

Программа обсуждена на заседании кафедры 25 августа 2009 г.

Программа обсуждена и одобрена на методической комиссии факультета
"___" _________________ 20_ г.

Председатель методической комиссии ФУПМ
чл.-корр. РАН — Ю.А. Флеров

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Лекция 1 (2 ак. часа). **Тема I. Постановка задачи о наилучшем приближении.** Основные определения. Теорема Э.Бореля о существовании наименее уклоняющегося элемента. Не единственность решения задачи о наилучшем приближении. Ограничение на тип норм, достаточное для единственности решения задачи о наилучшем приближении.

Лекция 2 (2 ак. часа). **Тема II. Теорема Чебышева**. Основные понятия: чебышевские пространства, многочлены, альтернанс. Примеры пространств Чебышева. Формулировка теоремы Чебышева. Свойства чебышевских многочленов. Интерполяция чебышевскими многочленами.

Лекция 3 (2 ак. часа). Доказательство теоремы Чебышева. Пространства Чебышева размерности большей единицы не существуют.

Лекция 4 (2 ак. часа). **Тема III. Оценка точности наилучшего приближения.** Определение ядра. Положительные ядра. Понятие аппроксимации с помощью ядер. Примеры ядер: ядро Фурье, Фейера. Теорема о равномерной аппроксимации функций для положительных ядер. Вывод теоремы Фейера и теоремы Вейерштрасса об аппроксимации функций многочленами.

Лекция 5 (2 ак. часа). Ядро Джексона. Свойства ядра Джексона. Оценка погрешности наилучшей аппроксимации для некоторого класса функций (теорема Джексона). Теорема Джексона для непериодических функций.

Лекция 6 (2 ак. часа). **Тема IV. Понятие оптимальной оценки приближения.** Определение оптимальных констант аппроксимации. Теорема Фавара об оптимальных константах. Функции Бернулли. Формула обращения. Интерполяция функций Бернулли четными и нечетными тригонометрическими многочленами.

Лекция 7 (2 ак. часа). Периодические интегралы периодических функций. Доказательство теоремы Фавара об оптимальных константах.

Лекция 8 (2 ак. часа). **Тема V. Постановка задачи интерполяции.** Узлы интерполяции. Константы Лебега. Теорема Лебега об оценке погрешности интерполяционного многочлена. Зависимость констант Лебега от взаимного расположения узлов. Экспоненциальный рост констант Лебега для равномерно распределенных узлов интерполяции.

.

Лекция 9 (2 ак. часа). Интерполяционный процесс. Погрешность интерполяции. Чебышевские узлы интерполяции. Теорема Фабера-Бернштейна о нижней оценке констант Лебега. Теорема Бернштейна о верхней оценке констант Лебега для чебышевских узлов интерполяции. Теоремы о равномерной сходимости интерполяционного процесса на чебышевских узлах для некоторого класса функций.

Лекция 10 (2 ак. часа). Интерполяция периодических функций. Константы Лебега для периодических функций. Теоремы Фабера-Бернштейна и Бернштейна для нижней и верхней оценки констант Лебега для периодических функций. Оценки погрешности для интерполяции периодических функций.

Лекция 11 (2 ак. часа). **Тема VI. Сплайны. Интерполяция сплайнами.** Определение сплайн-функций. Основные свойства сплайнов. Сплайн-аппроксимация. Неравенство Лебега для аппроксимации сплайнами.

Лекция 12 (2 ак. часа). Равномерная сходимость аппроксимации сплайнами. Понятие насыщаемости алгоритма.Насыщаемость алгоритма аппроксимации сплайнами.

Лекция 13 (2 ак. часа). **Тема VII. Конечные разности и интерполяционный полином Ньютона.** Оператор конечной разности. Свойства этого оператора. Факториальные полиномы. Свойства факториальных полиномов.

Лекция 14 (2 ак. часа). Целозначные полиномы с рациональными коэффициентами. Решение задачи описания всех целозначных полиномов.

Лекция 15 (2 ак. часа). **Тема VIII. Пример Бернштейна расходящегося интерполяционного процесса.** Доказательство расходимости интерполяционного процесса в примере Бернштейна всюду за исключением трех точек.

Лекция 16 (2 ак. часа). Обзорная лекция.

Список рекомендуемой литературы

1. Локуциевский О.В., Гавриков М.Б. Начала численного анализа Издательство Янус, 1995 г.

2. Бабенко К.И. Основы численного анализа, АРВ, 2002.

Пояснительная записка

Целью курса («Теоретические основы численного анализа») является ознакомление студентов с математическим аппаратом аппроксимации функций. Ознакомившись с этим курсом, студенты станут лучше понимать возможности и ограничения при программировании функций на компьютерах. Предполагается знание основных элементов функционального анализа.

Лекции этой части курса предназначены для углубленного изучения предмета и получения знаний, необходимых специалисту в области программирования при решении задач аппроксимации таблично заданных функций.

Весь материал включает 10 тем:

В первой теме рассматривается общая математическая постановка задачи аппроксимации элементов бесконечномерного нормированного пространства с помощью элементов его конечномерного векторного подпространства. Приводятся примеры, когда такая задача может быть решена однозначно или же может иметь бесконечное множество решений.

Вторая тема посвящена вопросам нахождения аппроксимаций для непрерывных функций так называемыми чебышевскими многочленами. Доказано что в этом случае такая аппроксимация всегда существует и единственна.

В третьей теме обсуждаются оценки погрешности наилучшей аппроксимации для некоторых важных классов функций, описывающих решения некоторых классов задач математической физики.

Четвертая тема посвящена исследованию возможных оценок погрешности наилучшей аппроксимации для важного класса функций. Решается задача о нахождении оптимальной оценки аппроксимации на классе функций. Эта оценка не может быть улучшена. Более того указана функция, для которой оценка погрешности наилучшей аппроксимации достигается. Доказательство этого факта основано на использовании теоремы Чебышева об альтернансе и демонстрирует фундаментальность теоремы Чебышева.

В пятой теме рассматриваются вопросы приближения функции заданной таблично. Решается задача интерполяции и оценивается погрешность такой интерполяции. Оказывается, что точность интерполяции зависит от расположения узлов. Оказывается, что удобное равномерно распределенное расположение узлов с вычислительной точки зрения является очень плохим. Константы Лебега, позволяющие оценить погрешность аппроксимации с помощью интерполяционного многочлена, растут экспоненциально относительно числа узлов. Единственная возможность -- использовать чебышевские узлы интерполяции.

Шестая тема посвящена рассмотрению вопроса возможности использования интерполяций для решения задачи аппроксимации. Вводится понятие сплайн-интерполяции, обобщающих понятие интерполяции. Исследуется задачи сравнения наилучшего приближения функции и приближения функции с помощью сплайнов. Эти сплайны могут определяться на равномерно распределенных узлах, что, безусловно, упрощает их возможное использований на компьютерах. Использование сплайнов широко используется в современных численных методах решения задач математической физики.

В седьмой теме Рассмотрена классическая задача аппроксимации с помощью многочленов Ньютона. Рассмотрена задача построения целозначных многочленов с рациональными коэффициентами.

Восьмая тема посвящена рассмотрению поучительного примера Бернштейна. Анализируется последовательность аппроксимаций непрерывной функции интерполяциями. Эта последовательность расходится всюду за исключением трех точек.