Об унимодальности декартовой степени звезд[1]

Т. В. Андреева (ГУ-ВШЭ)

Аннотация. В работе доказана унимодальность множества, являющегося декартовой степенью k–звезды.

1. Введение

А. А. Сапоженко (см. [2], [3]) разработал метод получения асимптотики числа антицепей в так называемых унимодальных частично упорядоченных множествах (см. раздел 2). Двудольный граф $G = (X, Z; E)$ является *δ–расширителем*, если для всякого подмножества $A \subseteq X$ и его границы $\partial(A) \subseteq Z$ выполнено неравенство

$$|A| \le (1-\delta)|\partial(A)|.$$

Многослойное частично упорядоченное множество P со слоями $P^0, \dots, P^m$ называется *унимодальным*, если существует такое r, $0 \le r \le m$, что при $t < r$ графы с долями вершин P^t и P^{t+1} являются δ–расширителями, а при $t > r$ графы с долями вершин P^{t+1} и P^t являются δ–расширителями. В данной работе доказывается унимодальность частично упорядоченного множества S_k^n, диаграмма Хассе которого является декартовой степенью k–звезды (т.е. дерева с $k+1$ вершинами, одна из которых имеет степень k). С использованием свойства унимодальности множества S_k^n задача о числе антицепей в множестве S_k^n сводится к аналогичной задаче для подмножеств из трех слоев S_k^n (теорема 3.4).

2. Основные понятия

Множество M с заданным на нем отношением частичного порядка $\le$ называется *частично упорядоченным* (сокращенно ЧУМ). *Антицепью* в ЧУМ M называется множество, в котором нет пары $\{u, v\}$ такой, что $u \le v$.

Элемент u *непосредственно предшествует* элементу v (обозначение $u \prec v$), если $u \le v$, $u \ne v$ и, кроме того, $\{w : \; u \le w \le v\} = \{u, v\}$. Целочисленная функция r, определенная на ЧУМ M, называется *функцией ранга*, если $r(v) = r(u) + 1$ для всех u и v таких, что $u \prec v$. Если на ЧУМ M определена функция ранга r, то M называется *ранжированным множеством*, и если функция ранга принимает ровно n значений, то

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 01-01-00266.

M называется *n–слойным*, а его подмножество $M_k = \{v \in M : \; r(v) = k\}$ называется *k–м слоем* ранжированного множества M.

Нам понадобятся определения из статьи А.А. Сапоженко [4].

Двудольный граф $G = (X, Z; E)$ называется *простым* (ε, δ)*– расширителем*, если

$$|A| \le \big|\partial(A)\big|(1-\delta)$$

для всякого множества $A \subseteq X$ такого, что

$$|A| \le \lceil \varepsilon |X| \, \rceil.$$

Двудольный граф $G = (X, Z; E)$ называется *граничным* (ε, δ)*–расширителем*, если

$$|A| \le \big|\partial(A)\big|(1-\delta)$$

для всякого множества $A \subseteq X$ такого, что

$$\big|\partial(A)\big| \le \lceil \varepsilon |Z| \, \rceil.$$

Везде далее[2]

$$g_1 = g_1(G) = \kappa^3 \log^{-7} \kappa, \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_1(G) = g_1/|Z|,$$

$$\delta_1 = \delta_1(G) = \kappa^{-1} \log^2 \kappa, \qquad \delta_2 = \delta_2(G) = \kappa^{-2} \log^9 \kappa.$$

Двудольный граф $G = (X, Z; E)$ назовем *полным* (Δ, κ, q, p)*–расширителем*, если он является граничным $(\varepsilon_1, \delta_1)$–расширителем, простым $(1, \delta_2)$–расширителем и удовлетворяет условиям

$$\min_{v \in X} \sigma(v) = \kappa, \tag{1}$$

$$\max_{v \in X \cup Z} \sigma(v) \le \kappa^p, \tag{2}$$

$$\max_{\substack{u, v \in X \\ v \ne u}} \big|\partial(\{u\}) \cap \partial(\{v\})\big| \le q, \tag{3}$$

$$\kappa/\sqrt{\log \kappa} \le \min_{v \in Z} \sigma(v) \le \max_{v \in Z} \sigma(v) \le \kappa, \tag{4}$$

а также условию

$$|X| \le 2^{(\Delta+1)\kappa - 2\log^2 \kappa}. \tag{5}$$

Двудольный граф $G = (X, Z; E)$ назовем (Δ, κ, q, p)*–полурасширителем*, если он является граничным $(\varepsilon_1, \delta_1)$–расширителем, простым $(1/2, \delta_2)$–расширителем и удовлетворяет условиям (1) – (5).

[2]В дальнейшем $\log a = \log_2 a$

Через $(P_0, P_1, \ldots, P_m)$ будем обозначать ранжированное множество P с $m+1$ слоями, где P^i является i–м слоем множества P. Через $\overline{P}$ обозначим ранжированное множество $(P^m, P^{m-1}, \ldots, P^0)$ такое, что $u \leq v$ в $\overline{P}$ тогда и только тогда, когда $v \leq u$ в P. Для i, j, $0 \leq i \leq j \leq m$, обозначим через $P^{[i,j]}$ множество $(P^i, P^{i+1}, \ldots, P^j)$ с $j-i+1$ слоями, в котором частичный порядок индуцирован частичным порядком в P.

Двуслойное множество $P = (P^0, P^1)$ назовем *полным* (Δ, κ, q, p)*–расширителем*, если его диаграмма Хассе является полным (Δ, κ, q, p)–расширителем.

Многослойное множество $P = (P^0, P^1, \ldots, P^m)$, $m \geq 2$, будем называть *полным* (Δ, κ, q, p)*–расширителем*, если при каждом $i = 0, 1, \ldots, m-1$ двуслойное множество $P^{[i,i+1]}$ является полным $(\Delta_i, \kappa_i, q_i, p_i)$–расширителем и при этом для всех $i = 0, 1, \ldots, m-1$ выполняются неравенства

$$\Delta_i \leq \Delta, \qquad q_i \leq q, \qquad \max_{v \in P} \sigma(v) \leq \kappa^p. \tag{6}$$

Ранжированное множество $P = (P^0, P^1, \ldots, P^m)$, $m \geq 1$, будем называть (Δ, κ, q, p)*–полурасширителем*, если при каждом $i = 0, 1, \ldots, m-1$ двуслойное множество $P^{[i,i+1]}$ является $(\Delta_i, \kappa_i, q_i, p_i)$–полурасширителем и при этом для всех $i = 0, 1, \ldots, m-1$ выполняется условие (5).

Ранжированное множество $P = (P^0, P^1, \ldots, P^m)$, $m \geq 1$, будем называть *двусторонним* (Δ, κ, q, p)*–полурасширителем*, если множества P и $\overline{P} = (P^m, P^{m-1}, \ldots, P^0)$ являются (Δ, κ, q, p)–полурасширителями. Пусть $m \geq 1$, $0 \leq r \leq s \leq m$. Ранжированное множество $P = (P^0, P^1, \ldots, P^m)$ будем называть $(\Delta, \kappa, q, p, r, s)$*–унимодальным*, если его подмножества $P^{[0,r]}$ и $\overline{P^{[s,m]}}$ являются полными (Δ, κ, q, p)–расширителями, или однослойными (при $r = 0$, $s = m$) множествами, а $P^{[r,s]}$ является двусторонним (Δ, κ, q, p)–полурасширителем (при $r < s$) или однослойным множеством (при $r = s$).

3. Доказательство основного результата

Пусть k — натуральное число, рассмотрим множество $S_k = \{-1, 0, 1, \ldots, k-1\}$ и зададим на нем отношение частичного порядка $\preceq$ следующим образом: $-1 \preceq i$ при $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Положим

$$S_k^n = \big\{\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \ : \ \alpha_i \in S_k, \ i = 1, \ldots, n\big\}.$$

Пусть $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in S_k^n$, тогда $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \preceq \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ если $\alpha_i \preceq \beta_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. *Весом набора* $\tilde{\alpha}$ из S_k^n называется число $\|\tilde{\alpha}\|$ его координат, равных -1. Вес набора является, очевидно, функцией ранга, поэтому S_k^n является ранжированным частично упорядоченным множеством. Через $S_{k,t}^n$ обозначим t–й слой множества S_k^n, содержащий наборы веса t.

В разделе 3.1 будет доказана расширительность множеств $(S_{k,t}^n, S_{k,t+1}^n)$ при $t \leq (n-k)/(k+1)$ (леммы 3.4, 3.9). В разделе 3.2 будет доказана

расширительность множеств $(S_{k,t}^n, S_{k,t-1}^n)$ при $t \geq (n+1)/(k+1)$ (леммы 3.11, 3.13). В разделе 3.3 доказывается:

Теорема 3.1. *Пусть $n = (k+1)m + i$ для некоторых целых m и i, $0 \leq i \leq k$. Тогда при достаточно больших m и $0 \leq i \leq k-1$ существует натуральное число $\Delta = \Delta(m)$ такое, что множество S_k^n является $(\Delta, km, 1, 2, m, m)$–унимодальным.*

При достаточно больших m и $i = k$ существует натуральное число $\Delta = \Delta(m)$ такое, что множество S_k^n является $(\Delta, k(m{+}1), 1, 2, m, m{+}1)$–унимодальным.

Заметим, что для всех $0 \leq t \leq k$

$$|S_{k,t}^n| = \binom{n}{t} k^{n-t}.$$

Справедлива следующая

Лемма 3.1. *Пусть для целых m и i, $0 \leq i \leq k$ выполнено $n = m(k+1) + i$, тогда*

a) для любого $0 \leq t \leq n$ справедливо $|S_{k,m}^n| \geq |S_{k,t}^n|$,

b) если $j = k$, то $|S_{k,m}^n| = |S_{k,m+1}^n|$.

Нам понадобятся результаты, полученные С.Л. Безруковым в работе [1] для множества S_{k+1}^n.

Приведем определение упорядочения L_k^n вершин множества S_k^n. Для задания порядка сначала необходимо определить упорядочение N_k^n множества $S_{k,0}^n$. Отметим, что если $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots \alpha_n) \in S_{k,0}^n$, то $\alpha_i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ для всех i. Обозначим через $S\Phi_k^n$ множество, полученное из S_{k-1}^n заменой в компонентах всех наборов символа 0 на 1, символа 1 на 2,…, символа $k-2$ на $k-1$. И пусть

$$H_k^n = \big\{\tilde{\alpha} \in S_{k,0}^n : \ \alpha_i \in \{0, k-1\}, i = 1, 2, \ldots, n\big\}.$$

Определение порядка N_k^n дадим индукцией по k. Отметим, что при $k = 1$ множество $S_{1,0}^n$ состоит всего из одной вершины, так что можно считать, что порядок N_1^n определен.

Базис индукции. По определению положим, что при $k = 2$ порядок N_2^n на множестве $S_{2,0}^n = B^n$ совпадает с лексикографическим при любом n.

Индуктивный переход. Будем считать, что при всех $1 \leq k' < k$ порядок $N_{k'}^n$ на множестве вершин $S_{k'}^n$ (а значит, и на $S\Phi_k^n$!) определен определен при всех n, и рассмотрим случай $k' = k$.

Положим, что вершина $\tilde{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in S_{k,0}^n$ является самой младшей в порядке N_k^n; скажем, что она образует первый блок, и обозначим $B_1 = \{\tilde{0}\}$. Пусть уже упорядочены все вершины из $S_{k,0}^n$, входящие в блоки с номерами $1, 2, \ldots, j$, и $j \leq 2^n$. Обозначим через $\tilde{\alpha} \in H_k^n$ самую старшую в порядке N_k^n вершину из j–го блока B_j, и пусть $\tilde{\beta} \in H_k^n$ — следующая за

$\tilde\alpha$ вершина в лексикографическом порядке. Построим совокупность B_{j+1} вершин $\tilde\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, получающихся из вершины $\tilde\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, заменой каждого $\beta_i \neq 0$ произвольным числом из множества $\{1, \ldots, k-1\}$ и каждого $\beta_i = 0$ на $\gamma_i = 0$ для всех i. Пусть $\tilde\gamma_1, \tilde\gamma_2 \in B_{j+1}$ и s — число нулевых координат набора $\tilde\beta$. Построим вершины $\tilde\gamma_1'$ и $\tilde\gamma_2'$, полученные соответственно из $\tilde\gamma_1$ и $\tilde\gamma_2$ вычеркиванием s нулевых координат. Отметим, что $\tilde\gamma_1', \tilde\gamma_2' \in S\Phi^{n-s}_{k,0}$. Положим $\tilde\gamma_1 < \tilde\gamma_2$ в порядке N^n_k, если и только если $\tilde\gamma_1' < \tilde\gamma_2'$ в порядке N^{n-s}_{k-1}. Кроме того, положим, что найденная таким образом из $(j+1)$–го блока самая младшая вершина является непосредственно следующей за $\tilde\alpha$ в порядке N^n_k. Вершину $\tilde\beta$ назовем *образующей* блока B_{j+1}.

Пусть теперь $\tilde\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \tilde\beta \in S^n_k$. Обозначим через $]\tilde\alpha[$ набор, полученный из $\tilde\alpha$ заменой каждого $\alpha_i = -1$ на $k-1$, через $[\tilde\alpha]$ — набор, полученный из $\tilde\alpha$ заменой каждого $\alpha_i = -1$ на 0. Скажем что $\tilde\alpha < \tilde\beta$ в порядке L^n_k, если и только если $]\tilde\alpha[<]\tilde\beta[$ в порядке N^n_k либо при $]\tilde\alpha[=]\tilde\beta[$ выполнено $[\tilde\alpha] > [\tilde\beta]$ в порядке N^n_k.

Пусть $A \subseteq S^n_{k,t}$, t — целое число. Обозначим через $CA \subseteq S^n_{k,t}$ множество, полученное заменой A на первые $|A|$ наборов из $S^n_{k,t}$ в порядке L^n_k, а через $LA \subseteq S^n_{k,t}$ — множество, полученное заменой A на последние $|A|$ наборов из $S^n_{k,t}$ в порядке L^n_k. Пусть $A \in S^n_{k,t}$. Совокупность всех наборов $\tau_r(A) \subseteq S^n_{k,r}$ назовем *r–тенью* множества A, если для любого $\tilde\beta \in \tau_r(A)$ найдется сравнимый с ним в частичном порядке $\preceq$ набор $\tilde\alpha$ из A.

В работе [1] доказаны следующие утверждения:

Теорема 3.2. *Пусть $A \subseteq S^n_{k,t}$, $r \geq 1$, тогда*

a) $\tau_{t-r}(CA) \subseteq C\tau_{t-r}(A)$,

b) если $CA{=}A$, то $\tau_{t-r}(CA) = C\tau_{t-r}(A)$.

Теорема 3.3. *Пусть $A \subseteq S^n_{k,t}$, $r \geq 1$, тогда*

a) $\tau_{t+r}(LA) \subseteq L\tau_{t+r}(A)$,

b) если $LA{=}A$, то $\tau_{t+r}(A) = L\tau_{t+r}(A)$.

3.1. Расширительность «верхних слоев» S^n_k

В работе [4] А.А. Сапоженко доказал следующее утверждение:

Лемма 3.2. *Пусть $G = (X, Z; E)$ — двудольный граф такой, что*

$$\max_{v\in Z} \sigma(v) = \nu, \qquad \min_{v\in X} \sigma(v) = \kappa,$$

и $\kappa > \nu$. Тогда $G = (X, Z; E)$ является простым $(1, 1/\kappa)$–расширителем.

Обозначим множество первых p наборов слоя $S^n_{k,t}$ в порядке L^n_k через $C^n_{k,t}(p)$. Положим $\tilde\alpha = (0, \ldots, 0, -1, \ldots, -1)$, $\|\tilde\alpha\| = r$. Из определения порядка L^n_k следует, что $\tau_t(\tilde\alpha) = C^n_{k,t}(|S^r_{k,t}|)$ для $t \leq r$.

Лемма 3.3. *Пусть $r = r(n, k, t, s) = \min\{i : \binom{i}{t} k^{i-t} \geq s\}$,*

$\tilde\alpha = (0, \ldots, 0, -1, \ldots, -1)$, $\|\tilde\alpha\| = r$. *Тогда*

$$C_{n,t}(s) \subseteq \tau_t(\tilde\alpha). \tag{7}$$

Доказательство. Положим $q = \binom{r}{t} k^{r-t}$. Поскольку $s \leq q$, то

$$C_{n,t}(s) \subseteq C_{n,t}(q).$$

С другой стороны,

$$C_{n,t}(q) = \tau_t(\tilde\alpha).$$

Отсюда вытекает (7).

Следствие 3.1. *Пусть $A \subseteq S^n_{k,t}$, $r < n$, $0 < t \leq n$, $|A| \leq \binom{r}{t} k^{r-t}$. Тогда*

$$|A| kt \leq \big|\tau_{t-1}(A)\big|(r-t+1). \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $|A| = s$, $B = CA$, $\tilde\alpha = (0, \ldots, 0, -1, \ldots, -1)$, $\|\tilde\alpha\| = r$. В силу теоремы 3.2 имеем

$$\big|\tau_{t-1}(A)\big| \geq \big|\tau_{t-1}(B)\big|, \tag{9}$$

а в силу (7) при $s \leq \binom{r}{t} k^{r-t}$

$$B \subseteq \tau_t(\tilde\alpha).$$

Заметим, что $\big|\tau_{t-1}(\tilde\beta)\big| = kt$ для всякого $\tilde\beta$ из B, и $\big|\tau_t(\tilde\gamma)\big| = (r-t+1)$ для всякого $\tilde\gamma$ из $\tau_{t-1}(B)$. Число ребер в двудольном графе $\big(B, \tau_{t-1}(B)\big)$ равно $|B|kt$ и не больше, чем $\big|\tau_{t-1}(B)\big|(r-t+1)$. Отсюда с учетом (9) получаем (8).

Следствие 3.2. *Пусть $A \subseteq S^n_{k,t}$, $r < n$, $0 < t \leq n$, $\big|\tau_{t-1}(A)\big| \leq \binom{r}{t-1} k^{r-t+1}$. Тогда выполнено неравенство (8).*

Доказательство. Покажем, что $|A| \leq \binom{r}{t} k^{r-t}$. Утверждение будет вытекать из следствия 3.1. Предположим, что $|A| = s > \binom{r}{t} k^{r-t}$. Пусть $B = CA$ и $s = \binom{r}{t-1} k^{r-t+1}$. Тогда существует набор $\tilde\beta$ из $B \setminus C_{n,t}\left(\binom{r}{t} k^{r-t}\right)$ такой, что

$$\big|\tau_{t-1}(\tilde\beta) \setminus C_{n,t-1}(s)\big| \geq 1.$$

Отсюда получаем, что

$$\big|\tau_{t-1}(A)\big| \geq \big|\tau_{t-1}(B)\big| \geq \binom{r}{t-1} k^{r-t+1} + 1 > \binom{r}{t-1} k^{r-t+1},$$

что противоречит условию.

Лемма 3.4. *Пусть $t > (n+1)/(k+1)$ и $\Gamma^n_t = (X, Z; E)$ — двудольный граф с долями вершин $X = S^n_{k,t}$, $Z = S^n_{k,t-1}$ и множеством ребер*

$$E = \big\{\{u, v\} : u \in X, v \in Z \ \ v \preceq u\big\}.$$

Пусть Δ_t — наименьшее число такое, что

$$|X| \le 2^{(\Delta_t+1)kt-2\log^2(kt)}. \tag{10}$$

Тогда при достаточно больших n граф Γ_t^n является полным $(\Delta_t, kt, 1, 1)$–расширителем.

Доказательство. Пусть $\kappa = kt$, $\delta_1 = \kappa^{-1}\log^2\kappa$, $\delta_2 = \kappa^{-2}\log^9\kappa$, $g_1 = \kappa^3\log^{-7}\kappa$, $\varepsilon_1 = g_1/|Z|$. Пусть $A \subseteq X = S_{k,t}^n$. Проверим выполнение условий (1)–(5). Выполнение условия (1) следует из того, что степень любой вершины $v \in X$ равна kt. Степень любой вершины $u \in Z$ равна $n-t+1$, и из условия следует, что

$$tk > n-t+1, \tag{11}$$

поэтому выполняются условия (2) при $p=1$ и (4). Условие (3) выполнено при $q=1$, поскольку для любых $u, v \in X$

$$\big|\tau_{t-1}(\{u\}) \cap \tau_{t-1}(\{v\})\big| \le 1,$$

выполнение условия (5) следует из (10).

При достаточно больших n имеем $g_1 \le \binom{t+2}{t-1}k^3$. Из следствия 3.2 при $r = t+2$ вытекает, что для всякого $A \subseteq X$ такого, что $\big|\tau_{t-1}(A)\big| = g \le g_1$ выполнено неравенство

$$|A| \le \big|\tau_{t-1}(A)\big|\frac{3}{kt} \le g(1-\delta_1). \tag{12}$$

Отсюда вытекает, что граф Γ_t^n является граничным $(\varepsilon_1, \delta_1)$–расширителем.

В силу (11) выполнены условия леммы 3.2, следовательно для всякого $A \subseteq X$ имеем

$$|A| \le \big|\tau_{t-1}(A)\big|(1-\kappa^{-1}) \le \big|\tau_{t-1}(A)\big|(1-\delta_2).$$

Это означает, что граф Γ_t^n является простым $(1, \delta_2)$–расширителем. Лемма доказана.

Из определения упорядочения L_k^n множества S_k^n следует, что первые p, $p \le n$, наборов слоя $S_{k,n-1}^n$ в порядке L_k^n выглядят следующим образом:

$$(0,-1,-1,\dots,-1),\ (-1,0,-1,\dots,-1),\ \dots,\ (\underbrace{-1,\dots,-1}_{p-1},0,-1,\dots,-1).$$

Для $0 \le p \le n$ положим

$$T(n,k,t,p) = \tau_t\big(C_{n,n-1}(p+1)\big) \setminus \tau_t\big(C_{n,n-1}(p)\big).$$

Множество $T(n,k,t,p)$ состоит из наборов, у которых $(p+1)$–я координата равна нулю, а первые p координат отличны от нуля. Обозначим $t(n,k,t,p) = \big|T(n,k,t,p)\big|$, тогда

$$\begin{aligned} t(n,k,t,p) &= \sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{t-i}(k-1)^{p-i}k^{n-1-p-t+i} \\ &= k^{n-1-t}\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{t-i}\Big(\frac{k-1}{k}\Big)^{p-i}, \end{aligned} \tag{13}$$

где i–е слагаемое равно количеству наборов, в которых число -1 среди первых p координат равно i.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 3.5. *При всех натуральных $k \ge 2$ выполнено*

$$\Big(1-\frac{1}{k}\Big)^k \le \frac{1}{e} \le \Big(1-\frac{1}{k}\Big)^{k-1}.$$

Доказательство. Второе неравенство следует из неравенства

$$\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k \le e,$$

см., например [5]. Докажем первое неравенство. Рассмотрим функцию $f(x) = (1-1/x)^x$. Покажем, что функция $f(x)$ монотонно возрастает при всех $x \ge 2$. Производная функции равна

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x\ln(1-1/x)}\left(\ln\Big(1-\frac{1}{x}\Big)+\frac{1}{x-1}\right) \\ &= -e^{x\ln(1-1/x)}\left(\ln\Big(1+\frac{1}{x-1}\Big)-\frac{1}{x-1}\right). \end{aligned}$$

Воспользуемся разложением $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots$, получим

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{x\ln(1-1/x)}\Big(-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2} \\ &\quad +\frac{1}{3(x-1)^3}-\frac{1}{4(x-1)^4}+\dots\Big) \\ &= e^{x\ln(1-1/x)}\Big(\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+\frac{1}{4(x-1)^4}+\dots\Big). \end{aligned}$$

Очевидно, что при $x \ge 2$ функция $f'(x)$ положительна, следовательно, функция $f(x)$ возрастает. Поскольку для всех $x \ge 2$ выполнено

$$\Big(1-\frac{1}{x}\Big)^x \le \Big(1-\frac{1}{x}\Big)^{x-1},$$

из второго неравенства следует, что функция $f(x)$ ограничена сверху. Таким образом, монотонная и ограниченная функция $f(x)$ имеет предел, равный $1/e$. Отсюда вытекает утверждение.

Лемма 3.6. *Пусть $k=2$, n достаточно велико и таково, что для некоторого целого m выполнено $n=3m+2$. Тогда*

$$\bigl|\tau_{m+1}\bigl(C_{n,n-1}(2)\bigr)\bigr| \geq \frac{1}{2}|S^n_{2,m+1}|.$$

Доказательство. Вычислим $\bigl|\tau_{m+1}\bigl(C_{n,n-1}(2)\bigr)\bigr|$ при $m=(n-2)/3$. Множество $\tau_{m+1}\bigl(C_{n,n-1}(2)\bigr)$ состоит из наборов, у которых в первых двух координатах есть хотя бы один нуль. По формуле включений – исключений получаем

$$\bigl|\tau_{m+1}\bigl(C_{n,n-1}(2)\bigr)\bigr| = 2\cdot 2^{n-m-2}\binom{n-1}{m+1} - 2^{n-m-2}\binom{n-2}{m} =$$

$$= 2^{n-m-2}\binom{n-1}{m+1}\frac{5n-4}{3(n-1)}. \qquad (14)$$

Теперь вычислим $\frac{1}{2}|S^n_{2,m+1}|$:

$$\frac{1}{2}|S^n_{2,m+1}| = 2^{n-m-2}\binom{n}{m+1} = 2^{n-m-2}\binom{n-1}{m+1}\frac{3n}{2n-1}. \qquad (15)$$

При достаточно больших n из (14) и (15) следует утверждение леммы.

Лемма 3.7. *Пусть $k\geq 3$, n достаточно велико и таково, что для некоторого целого m выполнено $n=(k+1)m+k$. Тогда*

$$\bigl|\tau_{m+1}\bigl(C_{n,n-1}(k)\bigr)\bigr| \geq \frac{1}{2}|S^n_{k,m+1}|.$$

Доказательство. Из (13) следует, что для любых k, n и $t,p\leq n$ выполнено

$$t(n,k,t,p) \geq |S^{n-1}_{k,t}|\Bigl(\frac{k-1}{k}\Bigr)^p. \qquad (16)$$

Кроме того, при $m=(n-k)/(k+1)$ выполнено

$$\frac{1}{2}|S^n_{k,m+1}| = \frac{1}{2}\binom{n}{m+1}k^{n-m-1} = |S^{n-1}_{k,m+1}|\frac{nk(k+1)}{2(kn-1)}. \qquad (17)$$

Из определения $t(n,k,m,p)$, (16) и формулы суммы геометрической прогрессии следует, что

$$\bigl|\tau_{m+1}\bigl(C_{n,n-1}(k)\bigr)\bigr| = \sum_{p=0}^{k-1} t(n,k,m+1,p) \geq |S^{n-1}_{k,m+1}|k\left(1-\Bigl(1-\frac{1}{k}\Bigr)^k\right). \quad (18)$$

Для $k=3$ при непосредственной проверке получаем из (17), (18), что если n достаточно велико, то

$$|S^{n-1}_{3,m+1}|\frac{3\cdot 19}{27} \geq |S^{n-1}_{3,m+1}|\frac{3\cdot 4n}{6n-2} = \frac{1}{2}|S^n_{3,m+1}|. \qquad (19)$$

Из (17) и леммы 3.5 при $k\geq 4$ и достаточно больших n следует, что

$$\begin{aligned} |S^{n-1}_{k,m+1}|k\left(1-\Bigl(1-\frac{1}{k}\Bigr)^k\right) &\geq |S^{n-1}_{k,m+1}|k\Bigl(1-\frac{1}{e}\Bigr) \\ &\geq |S^{n-1}_{k,m+1}|k\frac{n(k+1)}{2(kn-1)} = \frac{1}{2}|S^n_{k,m+1}|. \quad (20) \end{aligned}$$

Теперь из (18)–(20) следует утверждение леммы.

Лемма 3.8. *При $k>1$, всех a, n и $t,p<n$ справедливо*

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\binom{n-p}{t-i}a^i = \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p-1}{i}\binom{n-p}{t-i}a^i + \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p-1}{i}\binom{n-p}{t-1-i}a^{i+1}.$$

Доказательство. Утверждение следует из равенства

$$\binom{p}{i} = \binom{p-1}{i} + \binom{p-1}{i-1}.$$

Лемма 3.9. *Пусть n таково, что для некоторого целого m выполнено $n=(k+1)m+k$ и $\Gamma^n_m=(X,Z;E)$ — двудольный граф с долями вершин $X=S^n_{k,m+1}$, $Z=S^n_{k,m}$ и множеством ребер*

$$E=\bigl\{\{u,v\}:u\in X, v\in Z\ \ v\preceq u\bigr\}.$$

Тогда граф Γ^n_m является $\bigl(\Delta_{m+1},k(m+1),1,1\bigr)$–полурасширителем, где $\Delta_{m+1}=\bigl\lceil\frac{k+1}{k}\log(k+1)\bigr\rceil-1$.

Доказательство. Пусть $\kappa=k(m+1)=k(n+1)/(k+1)$, $\delta_1=\kappa^{-1}\log^2\kappa$, $\delta_2=\kappa^{-2}\log^9\kappa$, $g_1=\kappa^3\log^{-7}\kappa$, $\varepsilon_1=g_1/|Z|$.

Пусть $A\subseteq X=S^n_{k,m+1}$ и $|A|\leq |X|/2=\frac{1}{2}\binom{n}{m+1}k^{n-m-1}$. Из лемм 3.6, 3.7 следует, что

$$|A|\leq\bigl|\tau_{m+1}\bigl(C_{n,n-1}(k)\bigr)\bigr|.$$

Если $\bigl|\tau_m(A)\bigr| \leq \bigl|\tau_m\bigl(C_{n,n-1}(1)\bigr)\bigr| = \binom{n-1}{m}k^{n-m-1}$, то в силу следствия 3.2 имеем

$$|A|k(n+1)/(k+1) \leq \bigl|\tau_m(A)\bigr|(kn-1)/(k+1).$$

Отсюда получаем, что

$$|A|\leq\bigl|\tau_m(A)\bigr|(1-\delta_2).$$

Если $\binom{n-1}{m}k^{n-m-1} < \bigl|\tau_m(A)\bigr|$, то положим $B = CA$. Для каждого множества B существует $1 \le p \le k-1$ такое, что

$$\bigl|\tau_{m+1}\bigl(C_{n,n-1}(p)\bigr)\bigr| < |B| \le \bigl|\tau_{m+1}\bigl(C_{n,n-1}(p+1)\bigr)\bigr|. \tag{21}$$

Из теоремы 3.2 и (21) вытекает, что $B \subseteq \tau_{m+1}\bigl(C_{n,n-1}(p+1)\bigr)$. Пусть $\tilde\alpha \in B$, тогда хотя бы одна из первых $p+1$ координат набора $\tilde\alpha$ равна нулю. Это же свойство сохраняется у множества $\tau_m(B)$, поэтому

$$\bigl|\tau_m(B)\bigr| \le \bigl|\tau_m\bigl(C_{n,n-1}(p+1)\bigr)\bigr|. \tag{22}$$

Рассмотрим двудольный граф $\bigl(B, \tau_m(B)\bigr)$. Заметим, что $\bigl|\tau_m(\tilde\alpha)\bigr| = \kappa$. Для $\tilde\beta \in \tau_m(B)$ возможны два варианта:

1) В первых p координатах ровно один нуль, и значение $(p+1)$–й координаты отлично от нуля. Тогда $\bigl|\tau_{m+1}(\tilde\beta) \cap B\bigr| = \kappa - 1$. Каждый такой набор принадлежит множеству $\tau_m\bigl(C_{n,n-1}(p)\bigr)$. Пусть $\Phi(p)$ равно числу таких наборов, тогда

$$\Phi(p) = k^{n-m-1}\sum_{i=0}^{p-1} p\binom{p-1}{i} \times$$
$$\times\left[\binom{n-p-1}{m-i}\Bigl(\frac{k-1}{k}\Bigr)^{p-i} + \binom{n-p-1}{m-1-i}\Bigl(\frac{k-1}{k}\Bigr)^{p-1-i}\right],$$

где i–е слагаемое равно количеству наборов, у которых число -1 среди первых p координат равно i, а значение $(p+1)$–й координаты отлично от нуля. С помощью лемм 3.5, 3.8 получаем при $p \le k-1$

$$\begin{aligned}
\Phi(p) &= pk^{n-m-1}\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\binom{n-p-1}{m-i}\Bigl(\frac{k-1}{k}\Bigr)^{p-i} \\
&\ge pk^{n-m-1}\binom{n-1}{m}\Bigl(\frac{k-1}{k}\Bigr)^{p} \\
&\ge pk^{n-m-1}\binom{n-1}{m}\Bigl(1-\frac{1}{k}\Bigr)^{k-1} \ge \frac{p}{e}k^{n-m-1}\binom{n-1}{m}.
\end{aligned} \tag{23}$$

2) В остальных случаях $\bigl|\tau_{m+1}(\tilde\beta) \cap B\bigr| \le \kappa$.

Число ребер $E(B)$ в графе $\bigl(B, \tau_m(B)\bigr)$ удовлетворяет соотношениям

$$|B|\kappa = E(B) \le \bigl|\tau_m(B)\bigr|\kappa - \Phi(p),$$

следовательно,

$$|B| \le \bigl|\tau_m(B)\bigr|\Bigl(1 - \frac{1}{\kappa}\frac{\Phi(p)}{\bigl|\tau_m(B)\bigr|}\Bigr).$$

В силу (13) и (22), имеем аналогично (18)

$$\begin{aligned}
\bigl|\tau_m(B)\bigr| \le \bigl|\tau_m\bigl(C_{n,n-1}(p+1)\bigr)\bigr| &= \sum_{i=0}^{p} t(n,k,m,i) \le (p+1)|S^{n-1}_{k,m}| \\
&= (p+1)k^{n-1-m}\binom{n-1}{m}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Из (23), (24) вытекает, что при $p \ge 1$

$$\frac{\Phi(p)}{\bigl|\tau_m(B)\bigr|} \le \frac{p}{e(p+1)} \le \frac{1}{e},$$

следовательно,

$$|B| \le \bigl|\tau_m(B)\bigr|(1-\delta_2). \tag{25}$$

Теперь из теоремы 3.2 следует, что граф Γ^n_m является простым $(1/2, \delta_2)$–расширителем. Поскольку (12) справедливо и для $m = (n+1)/(k+1)$, то граф Γ^n_m является граничным $(\varepsilon_1, \delta_1)$–расширителем. Проверим выполнение условий (1) – (5). Выполнение условий (1), (2) при $p = 1$ и (4) следует из того, что степень любой вершины $v \in X \cup Z$ равна $\kappa = k(n+1)/(k+1)$. Условие (3) выполнено при $q = 1$, поскольку для любых $u, v \in X$

$$\bigl|\tau_m(\{u\}) \cap \tau_m(\{v\})\bigr| \le 1.$$

Проверим выполнение условия (5). Воспользуемся уточненной формулой Стирлинга

$$|X| = \binom{n}{m+1}k^{n-m-1} = \frac{n!k^{n-m-1}}{(m+1)!(n-m-1)!} \le$$
$$\le \frac{n^{n+1/2}k^{\frac{nk-1}{k+1}}e^{1/(12n)}}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{n+1}{k+1}\right)^{\frac{n+1}{k+1}+\frac12}\left(\frac{nk-1}{k+1}\right)^{\frac{nk-1}{k+1}+\frac12}} \le$$
$$\le 2^{(n+1)\log(k+1)} \le 2^{(\Delta_{m+1}+1)k(n+1)/(k+1) - 2\log^2((n+1)k/(k+1))}. \tag{26}$$

Отсюда с учетом (25), (26) следует, что Γ^n_m является $\bigl(\Delta_{m+1}, k(m+1), 1, 1\bigr)$–полурасширителем. Лемма доказана.

3.2. Расширительность «нижних слоев» S^n_k

Положим

$$L^t(p) = S^n_{k,t} \setminus \tau_t\bigl(C_{n,n-1}(p)\bigr).$$

Множество $L^t(p)$ состоит из наборов, в которых значения первых p координат отличны от нуля. Нетрудно видеть, что

$$\bigl|L^t(n)\bigr| = \binom{n}{t}(k-1)^{n-t}. \tag{27}$$

Лемма 3.10. *Пусть $A \subseteq S^n_{k,t}$, $0 \le t < n-1$ и $|A| \le \binom{n}{t}(k-1)^{n-t}$. Тогда*

$$|A|(n-t) \le \bigl|\tau_{t+1}(A)\bigr|(t+1)(k-1). \tag{28}$$

Доказательство. Положим $B = LA$. В силу теоремы 3.3 имеем

$$\bigl|\tau_{t+1}(A)\bigr| \ge \bigl|\tau_{t+1}(B)\bigr|. \tag{29}$$

Поскольку $|B| \le \binom{n}{t}(k-1)^{n-t}$, то в силу (27) имеем

$$B \subseteq L^t(n).$$

Заметим, что $\bigl|\tau_{t+1}(\tilde\beta)\bigr| = n-t$ для всякого $\tilde\beta$ из B, и $\bigl|\tau_t(\tilde\gamma)\bigr| = (t+1)(k-1)$ для всякого $\tilde\gamma$ из $\tau_{t+1}(B)$. Число ребер $E(B)$ в двудольном графе $\bigl(B, \tau_{t+1}(B)\bigr)$ удовлетворяет соотношениям

$$|B|(n-t) = E(B) \le \bigl|\tau_{t+1}(B)\bigr|(t+1)(k-1).$$

Отсюда с учетом (29) получаем (28).

Следствие 3.3 *Пусть $A \subseteq S^n_{k,t}$, $t < n-1$ и $\bigl|\tau_{t+1}(A)\bigr| \le \binom{n}{t+1}(k-1)^{r-t-1}$. Тогда выполнено неравенство* (28).

Доказательство. Покажем, что $|A| \le \binom{n}{t}(k-1)^{n-t}$. Утверждение будет вытекать из леммы 3.10. Предположим, что $|A| > \binom{n}{t}(k-1)^{n-t}$. Пусть $B = LA$, тогда существует набор $\tilde\beta$ из $B \setminus L^t(n)$ такой, что

$$\bigl|\tau_{t+1}(\tilde\beta) \setminus L^{t+1}(n)\bigr| \ge 1.$$

Отсюда получаем, что при $t < n-1$

$$\bigl|\tau_{t+1}(A)\bigr| \ge \bigl|\tau_{t+1}(B)\bigr| \ge \binom{n}{t+1}k^{n-t-1} + 1 > \binom{n}{t+1}k^{n-t-1},$$

что противоречит условию.

Лемма 3.11. *Пусть $t < (n-k)/(k+1)$ и $\overline{\Gamma}^n_t = (X, Z; E)$ — двудольный граф с долями вершин $X = S^n_{k,t}$, $Z = S^n_{k,t+1}$ и множеством ребер*

$$E = \bigl\{\{u,v\} : u \in X, v \in Z \;\; u \preceq v\bigr\}.$$

Пусть Δ_t — наименьшее число такое, что

$$|X| \le 2^{(\Delta_t+1)(n-t) - 2\log^2(kt)}. \tag{30}$$

Пусть n достаточно велико. Тогда $\overline{\Gamma}^n_t$ является полным $(\Delta_t, n-t, 1, 1)$–расширителем.

Доказательство. Пусть $\kappa = n-t$, $\delta_1 = \kappa^{-1}\log^2\kappa$, $\delta_2 = \kappa^{-2}\log^9\kappa$, $g_1 = \kappa^3\log^{-7}\kappa$, $\varepsilon_1 = g_1/|Z|$. Пусть $A \subseteq X = S^n_{k,t}$. Проверим выполнение условий (1) – (5). Выполнение условия (1) следует из того, что степень любой вершины $v \in X$ равна $n-t$. Степень любой вершины $u \in Z$ равна $k(t+1)$, из условия следует, что

$$n - t > k(t+1), \tag{31}$$

поэтому выполнены условия (2) при $p = 1$ и (4). Условие (3) выполнено при $q = 1$, поскольку для любых $u, v \in X$

$$\bigl|\tau_{t+1}(\{u\}) \cap \tau_{t+1}(\{v\})\bigr| \le 1,$$

выполнение условия (5) следует из (30).

При достаточно больших n имеем $g_1 \le \binom{n}{t+1}(k-1)^{n-t-1}$. Из следствия 3.3 вытекает, что для всякого $A \subseteq X$ такого, что $\bigl|\tau_{t+1}(A)\bigr| = g \le g_1$ выполнено неравенство

$$|A| \le \bigl|\tau_{t+1}(A)\bigr|\frac{(t+1)(k-1)}{n-t} \le g(1-\delta_1). \tag{32}$$

Отсюда вытекает, что граф $\overline{\Gamma}^n_t$ является граничным $(\varepsilon_1, \delta_1)$–расширителем.

В силу (31) выполнены условия леммы 3.2, следовательно, для всякого $A \subseteq X$ имеем

$$|A| \le \bigl|\tau_{t+1}(A)\bigr|(1-\kappa^{-1}) \le \bigl|\tau_{t+1}(A)\bigr|(1-\delta_2).$$

Это означает, что граф $\overline{\Gamma}^n_t$ является простым $(1, \delta_2)$–расширителем. Лемма доказана.

Лемма 3.12. *Пусть n достаточно велико и таково, что для некоторого целого m выполнено $n = (k+1)m + k$. Тогда*

$$\bigl|L^m(\lfloor k/2 \rfloor)\bigr| \ge \frac{1}{2}|S^n_{k,m}|. \tag{33}$$

Доказательство. Из определения $L^m(p)$ следует, (33) эквивалентно следующему неравенству:

$$\bigl|\tau_m\bigl(C_{n,n-1}(\lfloor k/2 \rfloor)\bigr)\bigr| \le \frac{1}{2}|S^n_{k,m}|.$$

Из (13) следует, что для любых k, n, $t, p \le n$ выполнено

$$t(n,k,t,p) \le |S^{n-1}_{k,t}|. \tag{34}$$

Аналогично (17) имеем при достаточно больших n и $m = (n-k)/(k+1)$

$$\frac{1}{2}|S^n_{k,m}| = \frac{1}{2}\binom{n}{m}k^{n-m} = \frac{n(k+1)}{2(n+1)}|S^{n-1}_{k,m}| \ge \left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor|S^{n-1}_{k,m}|. \tag{35}$$

Из определения $t(n,k,m,p)$ и (34) имеем

$$\left|\tau_m\big(C_{n,n-1}(\lfloor k/2\rfloor)\big)\right| = \sum_{p=0}^{\lfloor k/2\rfloor-1} t(n,k,m,p) \le \lfloor k/2\rfloor |S_{k,m}^{n-1}|. \tag{36}$$

Теперь из (35) и (36) следует утверждение леммы.

Лемма 3.13. *Пусть* $n=(k+1)m+k$ *и* $\overline{\Gamma}_m^n=(X,Z;E)$ *— двудольный граф с долями вершин* $X=S_{k,m}^n$, $Z=S_{k,m+1}^n$ *и множеством ребер*

$$E=\big\{\{u,v\} : u\in X, v\in Z \ \ u\preceq v\big\}.$$

Тогда граф $\overline{\Gamma}_m^n$ *является* $\big(\Delta_m, k(m+1),1,1\big)$*–полурасширителем, где*

$$\Delta_m=\left\lceil \frac{k+1}{k}\log(k+1)\right\rceil - 1.$$

Доказательство. Пусть $\kappa=k(m+1)=k(n+1)/(k+1)$, $\delta_1=\kappa^{-1}\log^2\kappa$, $\delta_2=\kappa^{-2}\log^9\kappa$, $g_1=\kappa^3\log^{-7}\kappa$, $\varepsilon_1=g_1/|Z|$.

Пусть $A\subseteq X=S_{k,m}^n$ и $|A|\le|X|/2=\frac12\binom{n}{m}k^{n-m}$. Из леммы 3.12 следует, что $|A|\le\left|L^m(\lfloor k/2\rfloor)\right|$. Если $\left|\tau_{m+1}(A)\right|\le\left|L^{m+1}(n)\right|=\binom{n}{m+1}(k-1)^{n-m-1}$, то в силу следствия 3.3 имеем

$$|A|k(n+1)/(k+1)\le\left|\tau_{m+1}(A)\right|(k-1)(n+1)/(k+1),$$

следовательно,

$$|A|\le\left|\tau_{m+1}(A)\right|(1-\delta_2).$$

Если $\binom{n}{m+1}(k-1)^{m-n-1}<\left|\tau_{m+1}(A)\right|$, положим $B=LA$. Для каждого множества B существует $\lfloor k/2\rfloor\le p\le n-1$ такое, что

$$\left|L^m(p+1)\right|<|B|\le\left|L^m(p)\right|. \tag{37}$$

Из теоремы 3.3 и (37) вытекает, что $B\subseteq L^m(p)$. Пусть $\tilde\alpha\in B$, тогда ни одна из первых $p+1$ координат набора $\tilde\alpha$ не равна нулю. Это же свойство сохраняется у множества $\tau_m(B)$, поэтому

$$\left|\tau_{m+1}(B)\right|\le\left|L^{m+1}(p)\right|. \tag{38}$$

Рассмотрим двудольный граф $\big(B,\tau_m(B)\big)$. Заметим, что $\left|\tau_{m+1}(\tilde\alpha)\right|=\kappa$.

Для $\tilde\beta\in\tau_{m+1}(B)$ возможны два варианта:
1) $\tilde\beta\in L^{m+1}(p+1)$, и ровно i, $0\le i\le p$ из первых p координат равны -1, тогда $\left|\tau_m(\tilde\beta)\cap B\right|=\kappa-i$.
2) В остальных случаях $\left|\tau_m(\tilde\beta)\cap B\right|\le\kappa$.

Положим

$$\Psi(p)=k^{n-1-m}\sum_{i=0}^{p} i\binom{p}{i}\left[\binom{n-1-p}{m+1-i}\Big(\frac{k-1}{k}\Big)^{p+1-i}+\binom{n-1-p}{m-i}\Big(\frac{k-1}{k}\Big)^{p-i}\right],$$

где i–е слагаемое равно числу ребер, идущих из вершины $\tilde\beta\in\tau_{m+1}(B)$ в множество $\tau_m(\tilde\beta)\setminus B$, причем координат, равных -1 среди первых p координат $\tilde\beta$ равно i, а $(p+1)$–я координата отлична от нуля.

С использованием леммы 3.8 получим, что

$$\Psi(p)=pk^{n-1-m}\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m-i}\Big(\frac{k-1}{k}\Big)^{p-i}. \tag{39}$$

Тогда

$$|B|\kappa\le\left|\tau_{m+1}(B)\right|\kappa-\Psi(p),$$

следовательно,

$$|B|\le\left|\tau_{m+1}(B)\right|\Big(1-\frac{1}{\kappa}\frac{\Psi(p)}{\left|\tau_{m+1}(B)\right|}\Big). \tag{40}$$

Из (38) следует, что

$$\left|\tau_{m+1}(B)\right|\le\left|L^{m+1}(p)\right|=k^{n-m-1}\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\binom{n-p}{m+1-i}\Big(\frac{k-1}{k}\Big)^{p-i}, \tag{41}$$

где i–е слагаемое равно числу наборов, у которых число -1 среди первых p координат равно i.

Рассмотрим три случая:
1) $\lfloor k/2\rfloor\le p\le m+1$, тогда из (41) получаем

$$\begin{aligned}\left|\tau_{m+1}(B)\right| &\le k^{n-m-1}\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m+1-i}\Big(\frac{k-1}{k}\Big)^{p-i}\\ &+k^{n-m-1}\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m-i}\Big(\frac{k-1}{k}\Big)^{p-i}\\ &= k^{n-m-1}\binom{n-1-p}{m+1}\Big(\frac{k-1}{k}\Big)^{p}\\ &+k^{n-m-1}\sum_{i=0}^{p-1}\binom{p}{i+1}\binom{n-1-p}{m-i}\Big(\frac{k-1}{k}\Big)^{p-1-i}\\ &+k^{n-m-1}\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m-i}\Big(\frac{k-1}{k}\Big)^{p-i}.\end{aligned} \tag{42}$$

Покажем, что при $p \ge \lfloor k/2 \rfloor$

$$6\Psi(p) \ge \left|\tau_{m+1}(B)\right|. \tag{43}$$

Имеем при $m = (n-k)/(k+1)$

$$\begin{aligned} 3p\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i} &\ge 3p\binom{n-1}{m}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p} \\ &= \frac{3p(m+1)}{n-m-1}\binom{n-1}{m+1}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p} \\ &\ge \frac{3p}{k}\binom{n-1}{m+1}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p} \\ &\ge \binom{n-1-p}{m+1}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p}. \end{aligned} \tag{44}$$

Кроме того, при всех p, $k \ge 2$ и всех $0 \le i \le p$

$$2p\binom{p}{i} = \frac{2p(i+1)}{p-i}\binom{p}{i+1} \ge 2\binom{p}{i+1} \ge \frac{k}{k-1}\binom{p}{i+1},$$

следовательно,

$$2p\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i} \ge \sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i+1}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i-1}. \tag{45}$$

Теперь из (39), (44), (45) и (42) вытекает (43). Отсюда и из (40) получаем, что при $p \ge \lfloor k/2 \rfloor$

$$|B| \le \left|\tau_m(B)\right|\left(1 - \frac{1}{6\kappa}\right). \tag{46}$$

2) $m+2 \le p \le n-2-m$, тогда из (39) следует, что

$$\Psi(p) = pk^{n-1-m}\sum_{i=0}^{m}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i}, \tag{47}$$

из (41) получаем

$$\begin{aligned} \left|\tau_{m+1}(B)\right| &\le k^{n-m-1}\sum_{i=0}^{m+1}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m+1-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i} + \\ &+k^{n-m-1}\sum_{i=0}^{m}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= k^{n-m-1}\binom{n-1-p}{m+1}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p} + \\ &+k^{n-m-1}\sum_{i=0}^{m}\binom{p}{i+1}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-1-i} + \\ &+k^{n-m-1}\sum_{i=0}^{m}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i}. \end{aligned} \tag{48}$$

Покажем, что при $m+2 \le p \le n-2-m$

$$4\Psi(p) \ge \left|\tau_{m+1}(B)\right|. \tag{49}$$

Имеем

$$\begin{aligned} p\sum_{i=0}^{m}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i} \ge p\binom{n-1}{m}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p} \ge \\ \ge \frac{p}{k}\binom{n-1}{m+1}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p} \ge \binom{n-1-p}{m+1}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p}. \end{aligned} \tag{50}$$

Теперь из (45), (47), (50) и (48) вытекает (49), при $p \ge m+2$. Отсюда и из (40) получаем, что при $m+2 \le p \le n-2-m$

$$|B| \le \left|\tau_m(B)\right|\left(1 - \frac{1}{4\kappa}\right). \tag{51}$$

3) $n-1-m \le p \le n-1$, тогда из (39) следует, что

$$\Psi(p) = pk^{n-1-m}\sum_{i=p+1+m-n}^{m}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i}, \tag{52}$$

из (41) получаем

$$\begin{aligned} \left|\tau_{m+1}(B)\right| &\le k^{n-m-1}\sum_{i=p+2+m-n}^{m+1}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m+1-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i} + \\ &+ k^{n-m-1}\sum_{i=p+1+m-n}^{m}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i} = \\ &= k^{n-m-1}\sum_{i=p+1+m-n}^{m}\binom{p}{i+1}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-1-i} + \end{aligned}$$

$$+ k^{n-m-1} \sum_{i=p+1+m-n}^{m} \binom{p}{i} \binom{n-1-p}{m-i} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i}. \qquad (53)$$

Теперь из (45), (52) и (53) следует, что при $p \geq n-1-m$

$$3\Psi(p) \geq \left|\tau_m(B)\right|,$$

отсюда и из (40) получаем, что

$$|B| \leq \left|\tau_m(B)\right| \left(1 - \frac{1}{3\kappa}\right). \qquad (54)$$

Из теоремы 3.3, (46), (51) и (54) следует, что

$$|A| \leq \left|\tau_{m+1}(A)\right|(1-\delta_2).$$

Поскольку (32) справедливо и для $m = (n-k)/(k+1)$, то граф $\overline{\Gamma}_m^n$ является граничным $(\varepsilon_1, \delta_1)$–расширителем. Выполнение условий (1), (2) при $p = 1$ и (4) следует из того, что степень каждой вершины $v \in X \cup Z$ равна $\kappa = k(n+1)/(k+1)$. Условие (3) выполнено при $q = 1$, поскольку для любых $u, v \in X$

$$\left|\tau_{m+1}(\{u\}) \cap \tau_{m+1}(\{v\})\right| \leq 1.$$

Проверим выполнение условия (5). Поскольку $|X| = |Z|$, то в силу (26)

$$|X| \leq 2^{(n+1)\log(k+1)} \leq 2^{(\Delta_m+1)k(n+1)/(k+1) - 2\log^2\left((n+1)k/(k+1)\right)}.$$

Отсюда следует, что $\overline{\Gamma}_m^n$ является $\big(\Delta_m, k(n+1)/(k+1), 1, 1\big)$–полурасширителем.

3.3. Доказательство теоремы 3.1

Положим

$$\Delta = \max_{0 \leq t \leq n} \{\Delta_t\}, \qquad (55)$$

где Δ_t определено в леммах 3.4, 3.9, 3.11, 3.13.

Пусть также $\kappa = \lfloor k(n+1)/(k+1) \rfloor$. При $t \leq (n-k)/(k+1)$ степень вершины $v \in S_{k,t}^n$ в графе $\overline{\Gamma}_t^n$ равна $n - t \geq \kappa$. При $t \geq (n+1)/(k+1)$ степень вершины $v \in S_{k,t}^n$ в графе Γ_t^n равна $tk \geq \kappa$. Степень вершины $v \in S_{k,t}^n$ в S_k^n равна $n + t(k-1) \leq 2\kappa \leq \kappa^2$. Следовательно, (6) выполнено при $p = 2$. Условия (4), (5), очевидно, выполняются при $q = 1$ и Δ, определенном в (55).

В силу леммы 3.4, при каждом $t > (n+1)/(k+1)$ граф Γ_t^n является полным $(\Delta_t, kt, 1, 1)$–расширителем. Таким образом, множество $(S_{k,n}^n, \ldots, S_{k,\lfloor (n+1)/(k+1) \rfloor}^n)$ является полным $(\Delta, \kappa, 1, 2)$–расширителем.

В силу леммы 3.11, при каждом $t < (n-k)/(k+1)$ граф $\overline{\Gamma}_t^n$ является полным $(\Delta_t, n-t, 1, 1)$–расширителем. Таким образом, множество $(S_{k,0}^n, \ldots, S_{k,\lceil (n-k)/(k+1) \rceil}^n)$ является полным $(\Delta, \kappa, 1, 2)$–расширителем.

В силу лемм 3.9 и 3.13, при $n = (k+1)m + k$ графы Γ_m^n и $\overline{\Gamma}_m^n$ являются $(\Delta_m, \kappa, 1, 1)$–полурасширителями, поскольку $\Delta_m = \Delta_{m+1}$.

Из сказанного вытекает утверждение.

Обозначим через $\psi(P)$ число антицепей в частично упорядоченном множестве P. Из статьи А.А. Сапоженко [4] следует

Теорема 3.4. *Пусть $n = (k+1)m + i$ для некоторых целых m и i, $0 \leq i \leq k$. Тогда при достаточно больших m и* $0 \leq i \leq k-1$

$$\psi(S_k^n) = \left(1 + O(2^{-\log^2 n})\right)\psi(S_{k,m-1}^n \cup S_{k,m}^n \cup S_{k,m+1}^n).$$

При достаточно больших m и $i = k$

$$\psi(S_k^n) = \left(1 + O(2^{-\log^2 n})\right)\Big(\psi(S_{k,m-1}^n \cup S_{k,m}^n \cup S_{k,m+1}^n) + \psi(S_{k,m}^n \cup S_{k,m+1}^n \cup S_{k,m+2}^n)\Big).$$

Литература

[1] С.Л. Безруков, *Минимизация теней множеств полурешетки частичных отображений*, Методы дискретного анализа в исследовании функциональных систем – Институт математики СО АН СССР, 1988, вып. 47, с. 3 – 18.

[2] А.А. Сапоженко, *О числе антицепей в ранжированных частично упорядоченных множествах*, Дискретная математика – М.: Наука, 1989, т.1, вып. 1, в 74 – 93.

[3] А.А. Сапоженко, *О числе антицепей в многослойных ранжированных множествах*, Дискретная математика – М.: Наука, 1989, т.1, вып. 2, в 110 – 128.

[4] А.А. Сапоженко, *Проблема Дедекинда и метод граничных функционалов*, Математические вопросы кибернетики, Вып. 9 – М.: Наука, 2000, с. 161 – 220.

[5] Г.М. Фихтенгольц, *Основы математического анализа*, – М. 1968, том 1, стр. 99.