О двух методах распознавания эквивалентности в алгебраических моделях программ

Подловченко Р. И. (Москва, НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова)
Захаров В. А. (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, ф-т ВМК)

rip@vvv.srcc.msu.su, zakh@cs.msu.su

Назначение данной статьи — обратить внимание на один из последних результатов в теории моделей последовательных программ. В ней даётся представление об алгебраических моделях программ, об основных проблемах их теории, условиях, в которых они рассматриваются, и концепциях, лежащих в основе двух практикуемых методов распознавания эквивалентности. Формулируются результаты, полученные этими методами и применимые в программировании.

Алгебраические модели программ введены в [4] как обобщение двух моделей последовательных программ — операторных схем Ляпунова-Янова [3, 6] и дискретных преобразователей Глушкова-Летичевского [1]. Объекты алгебраической модели именуются схемами программ. В теории алгебраических моделей программ основной является проблема эквивалентных преобразований (э.п.) в модели. Она заключается в построении системы э.п., полной в модели, то есть удовлетворяющей требованию: для любых двух эквивалентных схем из этой модели существует конечная цепочка э.п., принадлежащих системе и транслирующая одну из схем в другую. Проблема э.п. рассматривается только в моделях с разрешимой проблемой эквивалентности, то есть предполагается наличие алгоритма, который распознает эквивалентность схем в модели. Таким образом, на первое место в исследованиях выходит проблема эквивалентности в модели.

Алгебраические модели строятся над двумя конечными алфавитами — алфавитом Y операторных символов и алфавитом P логических переменных, принимающих значения 0 и 1. Все алгебраические модели программ имеют общим множество своих объектов — схем программ и отличаются друг от друга отношением эквивалентности между схемами. Эти отношения вводятся единообразно, определяя тем самым всё множество моделей. Существенной является

Теорема 1. *Проблемы эквивалентности и э.п. в любой алгебраической модели программ над Y, P сводятся к одноимённым проблемам в моделях матричных схем над Y, P.*

На основании этой теоремы обе проблемы рассматриваются в моделях матричных схем. Опишем их. Матричная схема над Y, P представляет собой конечный граф с двумя выделенными вершинами — входом без заходящих в него дуг и выходом без исходящих из него дуг; остальные вершины наделены метками из Y; из каждой вершины графа, кроме выхода, исходят дуги в количестве, равном числу наборов значений всех переменных из P (множество таких наборов обозначается X), и помечены различными наборами.

Матричные схемы выполняются на функциях, отображающих множество всех цепочек операторных символов из Y (они называются операторными цепочками) в множество X. Такие функции называются функциями разметки. Выполнение схемы на функции разметки заключается в обходе схемы, который начинается в ее входе с пустой операторной цепочкой и сопровождается приписыванием к текущей операторной цепочке символа, сопоставленного вершине при переходе через нее; при этом выход из вершины происходит по дуге, помеченной тем набором из X, который является значением функции разметки на полученной цепочке. Результатом выполнения схемы считается цепочка, полученная к моменту достижения выхода схемы; иначе результат не определен. Эквивалентность схем определяется выбором двух параметров: отношения эквивалентности ν в множестве операторных цепочек над Y и подмножества L допустимых функций разметки: требуется, чтобы на любой допустимой функции разметки результат выполнения на ней одной из схем был определён, если определён результат выполнения другой, и эти результаты были ν-эквивалентными. С введением такой эквивалентности получается (ν, L)-модель матричных схем над Y, P.

К настоящему времени предложены два метода разрешения эквивалентности в моделях матричных схем — один в [5] и другой в [2]. Оба метода рассматривают сочетаемые маршруты в схемах, сравниваемых на эквивалентность, то есть пути в схемах, начинающиеся в их входах и пролагаемые общей для них допустимой функцией разметки. В терминах сочетаемых маршрутов формулируется критерий эквивалентности схем. Выделяется семейство упорядоченных моделей: в такой модели любая операторная цепочка не имеет ν-эквивалентных ей подцепочек, а допустимыми являются все функции разметки, сохраняющие своё значение на ν-эквивалентных операторных цепочках. Основанием этому является то, что в таких моделях сочетаемость маршрутов алгоритмически распознаваема, а в матричной схеме любой маршрут прокладывается некоторой допустимой функцией разметки.

Метод в [5] нацелен на распознавание эквивалентности, в процессе которого устанавливаются свойства структуры эквивалентных схем. Последнее необходимо для решения проблемы э.п. Концепция этого метода — осуществить проверку эквивалентности двух схем просмотром сочетаемых маршрутов в них, имеющих конечную длину, которая определяется размерами схем. Доказана

Теорема 2. *Проблема эквивалентности в уравновешенной модели с левым и правым сокращением разрешима за полиномиальное время относительно размеров сравниваемых схем; в такой модели решена и проблема э.п.*

Названные в теореме 2 модели — это частный вид упорядоченных моделей, в которых ν-эквивалентные цепочки равны по длине и сохраняют ν-эквивалентность при сокращении их на ν-эквивалентные префиксы (левая сократимость) и суффиксы (правая сократимость).

Альтернативный подход к построению эффективных алгоритмов решения задачи проверки эквивалентности схем программ предусматривает сведение этой задачи к проблеме пустоты для двухленточных односторонних детерминированных машин (2-DM) специального вида. Для проверки эквивалентности двух матричных схем π_1, π_2 в (ν, L)-модели необходимо построить 2-DM D_ν, описывающую отношение эквивалентности ν операторных цепочек, то есть распознающую все ν-эквивалентные пары операторных цепочек. Доказана

Теорема 3. *Отношение эквивалентности ν операторных цепочек может быть описано 2-DM тогда и только тогда, когда (ν, L)-модель является упорядоченной.*

Далее для пары схем π_1, π_2 и 2-DM D_ν, описывающей отношение эквивалентности ν операторных цепочек, строится комбинированная

2-DM $K(\pi_1, \pi_2, D_\nu)$, которая принимает в качестве входных данных, записанных на ее лентах, пары маршрутов в схемах π_1 и π_2. Устройство комбинированной 2-DM таково, что справедлива

Теорема 4. *Если 2-DM D_ν описывает эквивалентность ν операторных цепочек, то схемы π_1 и π_2 эквивалентны в (ν, L)-модели тогда и только тогда, когда комбинированная машина $K(\pi_1, \pi_2, D_\nu)$*

A: распознает пустое бинарное отношение и

B: в каждом бесконечном прогоне бесконечно часто считывает данные на обеих лентах.

Разрешимость проблемы пустоты для некоторых классов комбинированных машин $K(\pi_1, \pi_2, D_\nu)$ обеспечивает

Теорема 5. *Если эквивалентность ν операторных цепочек описывается 2-DM D_ν, имеющей конечное множество F допускающих состояний, и схемы π_1 и π_2 эквивалентны в (ν, L)-модели, то число состояний комбинированной машины $K(\pi_1, \pi_2, D_\nu)$, достижимых из ее начального состояния, ограничено величиной $2^{O(|F|(|\pi_1|+|\pi_2|))}$.*

Следствие 1. *Если отношение эквивалентности ν операторных цепочек разрешимо за полиномиальное время и описывается 2-DM D_ν, имеющей конечное множество F допускающих состояний, то проблема эквивалентности схем программ в (ν, L)-модели принадлежит классу сложности co-NP.*

Следствие 2. *Если отношение эквивалентности ν операторных цепочек описывается конечной 2-DM D_ν, то проблема эквивалентности схем программ в (ν, L)-модели принадлежит классу сложности $NLOG$.*

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» 2009–2013 г.г.

Список литературы

[1] Глушков В. М., Летичевский А. А. Теория дискретных преобразователей // Избранные вопросы алгебры и логики. — Новосибирск: Наука, 1973. — С. 5–39.

[2] Захаров В. А. Проверка эквивалентности программ при помощи двухленточных автоматов // Кибернетика и системный анализ. — 2010. № 4. — С. 39–48.

[3] Ляпунов А. А. О логических схемах программ // Проблемы кибернетики. — М.: Физматгиз, 1958. Вып. 1. — С. 46–74.

[4] Подловченко Р. И. Иерархия моделей программ // Программирование. — 1981. № 2. — С. 3–14.

[5] Подловченко Р. И. Об одной методике распознавания эквивалентности в алгебраических моделях программ // Программирование. — 2011. № 6.

[6] Янов Ю. И. О логических схемах алгоритмов // Проблемы кибернетики. — М.: Физматгиз, 1958. Вып. 1. — С. 75–127.